

# Herramientas del Álgebra Lineal para el control de Sistemas Lineales Dinámicos Conmutados

---

Trabajo de Fin de Grado

Autora: Laura Rivera Martínez

Directora: María Isabel García Planas

Convocatoria: Junio 2016



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



## Resumen

En el presente proyecto se aborda una introducción a la teoría sobre Sistemas Lineales Dinámicos Conmutados (SLDC), con el propósito de estudiar su comportamiento, que posteriormente (en el Capítulo 5) será aplicada a un problema del ámbito de la ingeniería eléctrica : un circuito RLC. A tal fin, se recurre a la teoría generalizada sobre Sistemas Lineales Dinámicos (SLD), (fundamentada a partir de las referencias [1] y [6], esencialmente) en la cual se desarrolla una explicación detallada acerca del espacio de soluciones, la estabilidad, controlabilidad y observabilidad que presentan, así como los criterios y herramientas empleados dentro del ámbito del Álgebra Lineal para llevarlo a cabo. La exposición de estas bases teóricas (integradas en el Capítulo 3 del proyecto) sirve de guión para el análisis de los SLDC, cuya teoría es desarrollada en el Capítulo 4 (donde se toman [16], [13] y [9] como referencias principales), y que constituye el cuerpo principal del proyecto. Al inicio de este capítulo se definen algunos conceptos previos asociados a los SLDC que servirán para su posterior comprensión, tales como *sistema discontinuo* (o *híbrido*, usado de manera equivalente en este trabajo) o *sistema conmutado*, que hacen referencia a sistemas que describen trayectorias discontinuas por tramos, siendo el segundo una particularización del primero, que tiene como característica la continuidad del punto de unión de las trayectorias que lo integran (y es, además, el caso que ocupa a este trabajo). También se define el concepto de *señal de conmutación*, a partir del cual se propone una clasificación de sistemas según sea el comportamiento de esta (señal dependiente del tiempo y señal dependiente del estado) y que posteriormente se verá reflejado en el Capítulo 5, en que se abordan dos situaciones derivadas de un mismo caso práctico.

A partir de la teoría expuesta en los Capítulos 3 y 4, en el Capítulo 5 se desarrolla un caso concreto de SLDC que consiste, tal y como se ha especificado anteriormente, en un circuito eléctrico RLC serie, es decir, compuesto por una resistencia, una bobina y un condensador conectados en serie, además de una fuente de tensión constante. El circuito contiene dos interruptores, que constituyen el elemento conmutador del sistema, de manera que cuando uno se cierra (estado ON) el otro se abre (estado OFF), y el sistema adquiere un comportamiento diferente, modelizado por un sistema de ecuaciones diferenciales que se compactan en forma de SLD. Así, a partir de los dos subsistemas (de tipo SLD) se conforma un SLDC, que conmuta gracias a la acción de los interruptores según la variable tiempo (primer caso, integrado en el Capítulo 5.1) o el estado (segundo caso, en el Capítulo 5.2). Se analiza el espacio de soluciones, la estabilidad, la controlabilidad y la observabilidad del sistema general, en forma de parámetros genéricos (la resistencia  $R$ , la inductancia  $L$ , la capacitancia  $C$ , y la tensión de la fuente  $E$ ) y también para valores concretos. A modo de conclusión general, se tiene que es posible analizar un SLDC aplicando las herramientas que proporciona el Álgebra Lineal sin necesidad de recurrir a la experimentación y/o simulación.

# Sumario

<b>RESUMEN</b>	<b>2</b>
<b>SUMARIO</b>	<b>3</b>
<b>1. PREFACIO</b>	<b>5</b>
1.1. Origen del proyecto .....	5
1.2. Motivación .....	6
1.3. Requerimientos previos.....	6
<b>2. INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
2.1. Objetivos del proyecto .....	9
2.2. Alcance del proyecto .....	10
<b>3. SISTEMAS LINEALES DINÁMICOS</b>	<b>13</b>
3.1. Clasificación y ejemplos .....	13
3.1.1. Sistema estático/dinámico .....	14
3.1.2. Sistema lineal/ no lineal.....	15
3.1.3. Sistema continuo/ discreto .....	15
3.2. Sistemas lineales dinámicos a coeficientes constantes.....	15
3.2.1. Sistemas Lineales Dinámicos en tiempo continuo .....	15
3.2.2. Sistemas Lineales Dinámicos en tiempo discreto .....	19
3.3. Estabilidad de SLD .....	23
3.3.1. Definición de estabilidad y puntos de equilibrio.....	23
3.3.2. Criterio algebraico para el análisis de estabilidad .....	23
3.3.3. Criterio de Lyapunov para el análisis de estabilidad .....	25
3.4. Controlabilidad y observabilidad de SLD .....	27
3.4.1. Introducción .....	27
3.4.2. Controlabilidad .....	27
3.4.3. Observabilidad .....	33
<b>4. SISTEMAS LINEALES DINÁMICOS CONMUTADOS</b>	<b>37</b>
4.1. Definición de SLDC.....	37
4.2. Solución de SLDC.....	40
4.3. Estabilidad de SLDC.....	42
4.3.1. Criterio algebraico para el análisis de estabilidad.....	43
4.3.2. Criterio de Lyapunov para el análisis de estabilidad.....	43
4.4. Controlabilidad y observabilidad de SLDC .....	44
4.4.1. Controlabilidad de SLDC .....	44

4.4.2. Observabilidad de SLDC .....	46
4.4.3. Dualidad de estados controlables-observables .....	46
<b>5. CASO DE ESTUDIO: CIRCUITO RLC .....</b>	<b>47</b>
5.1. SLDC con señal de conmutación dependiente del tiempo .....	47
5.2. SLDC con señal de conmutación dependiente del estado .....	68
<b>6. PLANIFICACIÓN .....</b>	<b>81</b>
<b>7. COSTES .....</b>	<b>83</b>
<b>8. IMPACTO AMBIENTAL .....</b>	<b>85</b>
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>86</b>
<b>AGRADECIMIENTOS .....</b>	<b>89</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>91</b>
Referencias bibliográficas .....	91
Bibliografía complementaria .....	92

# 1. Prefacio

## 1.1. Origen del proyecto

Los Sistemas Lineales Dinámicos Conmutados (a partir de ahora, SLDC) constituyen una rama dentro del Control Automático con una relevancia creciente desde finales del siglo pasado. En concreto, su estudio suscitó la atención gracias a la revolución informática de la década de los 90 debido a la aparición de nuevas herramientas de mayor precisión que permitían un análisis exhaustivo. Asimismo, considerando los avances tecnológicos que se han ido alcanzando, ha sido necesario un replanteamiento de la casuística asociada a problemas surgidos, que pueden ser resueltos con metodologías de los SLDC.

Una de sus características principales es la versatilidad que presentan, bien para ser modelizados o analizados, ya que existen tantas posibilidades como combinaciones lógicas se puedan establecer, en un sentido abstracto, sobre todo teniendo en cuenta la intención del ser humano en tratarlos. Es decir, el planteamiento de un suceso concreto puede derivar en multitud de modelos distintos, según sean las consideraciones o referencias que se tomen al hacerlo. Por ejemplo, si se desea estudiar el comportamiento de un sistema que admite diferentes permutaciones de conmutación asociadas a un elemento en concreto, se puede analizar dicho sistema forzando un tipo de conmutación que dependa de algún parámetro o variable, o que haga que el sistema permanezca en un estado determinado o oscile entre dos estados, entre muchas opciones posibles.

El enfoque de los SLDC puede darse desde muchas perspectivas, siendo la informática en el ámbito del control automático la más extendida (por la facilidad de comprensión que presentan sus resultados, así como por los avances tecnológicos comentados con anterioridad). En concreto, la simulación de sistemas es una herramienta de gran utilidad que se emplea con frecuencia. Sin embargo, se va a elegir en este Trabajo de Fin de Grado el enfoque matemático para llevar a cabo el análisis de SLDC. En este sentido, son especialmente interesantes por dos motivos. El primero, se dispone de suficientes herramientas matemáticas para llevar a cabo su análisis, al ser relativamente sencillo. El segundo, son sistemas que representan de manera fiel una gran variedad de procesos dinámicos complejos que se encuentran en problemas de ingeniería.

## 1.2. Motivación

El amplio abanico de posibilidades que ofrece el análisis de sistemas lineales para entender el funcionamiento de los sucesos del mundo real es tal que es necesario realizar un estudio profundo de ellos. En particular, la conmutación es un elemento que añade relativa complejidad a un proceso, y es por ello que debe ser desglosado y enfocado desde un punto de vista correcto.

Las matemáticas ofrecen de una manera rigurosa, si se usan de manera correcta, la posibilidad de extraer conclusiones gracias a sus herramientas. Una de las más agradecidas, en el sentido de aportar información, es el Álgebra Lineal.

La elección de las matemáticas como recurso para analizar los SLDC ha sido el factor fundamental que ha motivado este trabajo. En primer lugar, permiten establecer relaciones y extraer conclusiones en base a deducciones realizadas sin la necesidad de experimentar o simular. En segundo lugar, teniendo en cuenta la aplicación práctica que requiere cualquier estudio, para por lo menos darle un enfoque comercial, es sabido que en el mundo de la ingeniería es un aspecto a destacar cuya ausencia podría anular el interés de infinidad de proyectos. En este sentido, en la ingeniería se exponen los resultados obtenidos de un sistema concibiéndolo como una “caja negra”, es decir, sin prestar atención en lo que pasa en su interior, de manera que se concluye una ley, regla o algoritmo válidos para los *inputs* y *outputs* que entran y salen de ella, respectivamente, y que el ingeniero es capaz de observar. No obstante, este trabajo pretende estudiar qué pasa dentro de esta “caja negra”, es decir, estudiar qué, cómo y el por qué, de lo que hay dentro de ella. Así, se deben olvidar prejuicios o suposiciones sobre el sistema que se trata, ya que este no puede estar sujeto a modificaciones tales como simplificaciones u omisiones que desmerecerían el estudio por completo. En último lugar, la finalidad de este trabajo es justificar el uso de las matemáticas como herramientas capaces de explicar gran variedad de incógnitas, prescindiendo del valor que puedan aportar los resultados en un sentido práctico o real.

## 1.3. Requerimientos previos

Para la realización de este proyecto ha sido necesario el estudio de diferentes temáticas relativas al mundo de las matemáticas. En particular, para el estudio de los Sistemas Lineales Dinámicos (a partir de ahora, SLD) el Álgebra Lineal ha sido un aspecto fundamental, en el cual se ha indagado con profundidad. Además, el Control Automático ha complementado la formación requerida para el entendimiento de los conceptos asociados tanto a SLD como SLDC. Estas dos disciplinas han sido impartidas en el grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales, pues constituyen una parte fundamental del estudio analítico de sistemas. Cabe destacar, sin embargo, que se ha hecho hincapié en el Álgebra Lineal porque se han tomado

sus formulaciones como criterios para hacer razonamientos, aun existiendo la posibilidad de usar otros (por ejemplo, pertenecientes al mundo del cálculo integral).

Para el estudio de la aplicación práctica, además, ha sido necesario el análisis de conceptos sobre competencias adquiridas en asignaturas como Electromagnetismo, Electrotecnia o Electrónica. A tal fin, se han revisado y estudiado los elementos fundamentales de los circuitos eléctricos, así como las leyes de circuitos que los rigen.





## 2. Introducción

Las herramientas de las matemáticas, aun siendo difíciles de analizar o tratar debido a la complicación que puedan presentar, son esenciales para la explicación de los sucesos del mundo real. Así, si no dispusiéramos de ellas, no habría un lenguaje para, al menos, plantear los problemas que ocurren ni, por supuesto, existiría modo alguno de resolverlos. Es por ello que el hombre usa la lógica desde tiempos ancestrales, para hallar “algo” que pueda darle un motivo coherente a aquello que observa, y no solamente optando por recursos empíricos, que tan sólo le pueden aportar información sobre el pasado y que no son más que una deducción infundada y basada en porcentajes sobre ocurrencias. Asimismo, con el estudio al detalle de los sucesos y su cuidadosa modelización, se pueden establecer relaciones importantes en lo que se pretende y/o se es capaz de observar.

### 2.1. Objetivos del proyecto

Los objetivos de este proyecto se centran en dos bloques fundamentales. Por un lado, el desarrollo de la teoría sobre los SLDC (Bloque I) y, por otro, la aplicación de dicha teoría a dos variantes de un caso concreto de modelo de SLDC (Bloque II).

Para poder profundizar en cada bloque, se definen a continuación los objetivos de manera más detallada:

#### BLOQUE I

- Introducción del concepto de sistema. Identificar los modelos que describen un sistema.
- Identificar y clasificar los tipos de sistemas en términos de lenguaje matemático.
- Analizar los sistemas lineales dinámicos (abreviadamente SLD), familia en que se engloban los sistemas lineales dinámicos conmutados (abreviadamente SLDC). Plantear la solución si existe, mediante el lenguaje matemático. Realizar un estudio de su estabilidad mediante diferentes criterios mediante herramientas de Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial. Analizar los criterios de controlabilidad y observabilidad mediante herramientas de Álgebra Lineal y Matricial.
- Describir los SLDC y los modos de conmutación que pueden presentar. Presentar de forma análoga las explicaciones dadas para SLD en referencia a solución, estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Establecer criterios específicos y concretos para diferenciarlos de la familia general (SLD).

#### BLOQUE II

- Aplicación de la teoría expuesta a un caso práctico del ámbito de la ingeniería eléctrica: un circuito RLC descrito por dos subsistemas que se modelizan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y que conmutan entre sí gracias a una señal de conmutación.

Diferenciar dos casos particulares del circuito RLC considerando dos tipos de señales de conmutación: una dependiente del tiempo y una dependiente del estado del sistema global.

- Analizar la solución y discutir la estabilidad de los sistemas planteados, bajo términos generales y bajo parámetros específicos. Determinar la controlabilidad y observabilidad que pueden presentar en términos generales, así como el espacio de estados que cumplen estas últimas propiedades.
- Diagnosticar los problemas e incompatibilidades que presentan los sistemas bajo unos parámetros y condiciones concretos, replantear y reconducir el sistema de manera que su estudio sea viable. Se pretende, con este análisis, que la modelización se pueda asimilar a un caso del ámbito de la ingeniería, de forma que el planteamiento del sistema se debe hacer acorde a los criterios y la experimentación establecidos en modelos de circuitos RLC.
- Discutir, para el caso práctico, las dos metodologías conocidas que se usan para resolverlo: la matemática (utilizada en este proyecto), en contraposición a la metodología habitual usada en ingeniería eléctrica. Demostrar la validez de las herramientas del lenguaje matemático (en particular, del Álgebra Lineal) para el desarrollo de un problema de la ingeniería.

## 2.2. Alcance del proyecto

Si bien este proyecto se trata de un estudio analítico, la pretensión es que su alcance sea la familiarización con las técnicas expuestas y que sirvan para el estudio al detalle de las múltiples aplicaciones que puedan surgir.

Los SLDC están en continuo desarrollo por parte de la comunidad científica, cosa que conlleva una extensa colección de publicaciones acerca de ellos. Este proyecto contempla solamente los puntos de vista y/o criterios que a la autora le han parecido más viables para realizar el estudio, sobre todo teniendo en cuenta que el objetivo es el uso del lenguaje del Álgebra Lineal. En concreto, se hace un estudio en profundidad de los SLDC con señal de conmutación externa, regida por una expresión matemática dependiente del tiempo y del estado, en cada caso diferenciado sobre la aplicación práctica. Así, en futuras investigaciones, sería posible cambiar el comportamiento de la señal (por ejemplo, forzando un comportamiento cíclico a lo largo del sistema global) o la ley por la que esta viene determinada (por ejemplo, estableciendo un algoritmo en código binario). También sería posible realizar el estudio en tiempo discreto. Se invita por tanto a explorar otros caminos para determinar la influencia de los distintos tipos de conmutación.

Además, al ser el trabajo un estudio analítico, este se presta a usar otras vías tales como la simulación o la experimentación con tal de comparar y discutir los resultados alcanzados en el capítulo referente a la aplicación práctica.

En último lugar, para destacar las prestaciones que los SLDC pueden ofrecer al mundo de la ingeniería, se puede aplicar el estudio a otros casos prácticos, vinculados sobre todo a la “tecnología inteligente”. En particular, se ofrece la posibilidad de investigar en sistemas

inteligentes para acondicionar instalaciones. Un posible ejemplo sería el de climatizar un domicilio usando los sistemas de calefacción y refrigeración que tenga, en el cual la señal de conmutación sea la consigna de la temperatura registrada dentro de él en cada instante. Este estudio podría resultar beneficioso ya que el ahorro de energía repercutiría directamente al medio ambiente, así como al ahorro económico.

Las necesidades del mundo contemporáneo implican nuevos planteamientos para desarrollar nuevas aplicaciones y prestaciones que son fácilmente estructurables a partir de la concepción de un modelo de SLDC. Así, se estima que el estudio de la nueva tecnología mediante los SLDC es una herramienta de futuro prometedor.



### 3. Sistemas Lineales Dinámicos

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de los sistemas lineales dinámicos conmutados (SLDC), en este capítulo se introducen conceptos relativos a los sistemas lineales dinámicos (SLD) que servirán posteriormente para el estudio de los conmutados.

Las matemáticas tienen dos vertientes importantes en el ámbito de la modelización de sistemas. Estas son, por un lado, la posibilidad de usarse como lenguaje en la formulación de los problemas con la ayuda de conceptos matemáticos buscando con ello la precisión y claridad; y por otro lado, la capacidad para emplearse como herramientas para la resolución de los problemas planteados, ya sea de manera analítica o por simulación.

En primer lugar, se introduce el concepto de *sistema*. Un sistema es una abstracción de una realidad física de acuerdo a los objetivos de estudio planteados ([6]), es decir, de un proceso concreto que se pretende conocer. A tal fin, se requiere el conocimiento exhaustivo de las relaciones que existen entre las posibles decisiones a tomar sobre el sistema, y los resultados que determinarían cada una de ellas. Esto es lo que se denomina modelo del proceso, de los cuales se pueden encontrar gran variedad de tipos (prototipos, conceptuales, tablas, etc) aunque en este proyecto se van a establecer los matemáticos como herramienta para el conocimiento de los sistemas que se detallarán posteriormente. Los modelos matemáticos están constituidos por las relaciones formales existentes entre las señales de entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$  de un sistema concreto, y por ello el concepto de sistema va a ser a partir de ahora, el objeto abstracto formado por las relaciones que ligan ambas señales.

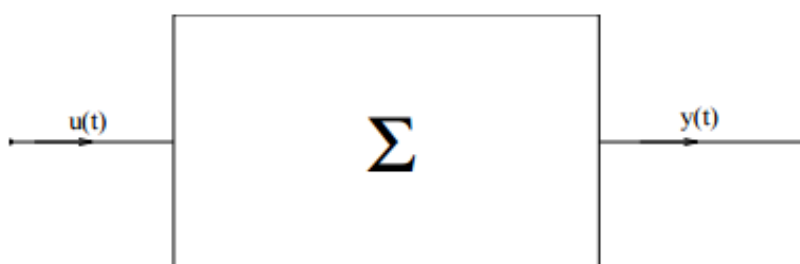


Figura 1. Diagrama funcional de un sistema  $\Sigma$ . Fuente: [1]

#### 3.1. Clasificación y ejemplos

Los sistemas se pueden clasificar de distintas maneras según el punto de vista en el que se quieren estudiar. Una posible primera clasificación elemental de las relaciones que ligan a las señales de entrada y salida de los sistemas es en sistemas estáticos y sistemas dinámicos, este último caso es el que concierne al estudio de este trabajo.

Es bastante variada y extensa la bibliografía referente a la clasificación de sistemas. Para las definiciones dadas a continuación, se ha tomado como referencia [1].

### 3.1.1. Sistema estático/dinámico

Por un lado, los sistemas estáticos son aquellos en los que el valor que toma la señal de salida  $y(t)$  en un cierto tiempo  $t$  depende exclusivamente del valor tomado por la señal de entrada  $u(t)$  en ese instante, y no del historial de valores tomados en el pasado por dicha señal. Normalmente son representados a través de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales y en derivadas parciales (respecto a coordenadas espaciales). La manera más sencilla para representarlos es con una única ecuación algebraica (Ec. 1), en que  $F$  es una función uniforme.

$$y(t) = F\{u(t)\} \quad (\text{Ec.1})$$

También existen otro tipo de sistemas estáticos, llamados sistemas lógicos combinacionales, en que los valores de la entrada y salida se encuentran en el conjunto finito formado por las variables binarias 0 y 1, y cuyas relaciones vienen determinadas por tablas en que se especifica el valor de las variables de salida para cada combinación de las variables de entrada.

Por otro lado, los sistemas dinámicos son sistemas cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. Se trata de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, por ecuaciones en diferencias finitas o por diagramas de estados, en los que el valor que alcanza la señal de salida  $y(t)$ , en un cierto instante de tiempo  $t$  depende del valor alcanzado en  $t$  y en todos los instantes anteriores. En ellos, por tanto, la consideración del tiempo juega un papel esencial.

Para el estudio del comportamiento de los sistemas dinámicos, es conveniente modelar dichos sistemas mediante un conjunto de expresiones que caracterizan la evolución de las variables, esta caracterización se realiza mediante ecuaciones diferenciales (Ec. 2) o ecuaciones en diferencias finitas (Ec.3), según sea la evolución del tiempo continua o discreta, respectivamente. En concreto, se va a estudiar el caso lineal de ambas ecuaciones.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = b_0(t) \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_n(t)u \quad (\text{Ec.2})$$

$$y(t+n) + \dots + a_{m-1}y(t+1) + a_my(t) = b_0u(t+n) + \dots + b_nu(t+1) + b_mu(t) \quad (\text{Ec.3})$$

En el caso particular de sistemas que se modelizan con diagramas de estados, se conciben los circuitos lógicos secuenciales (también llamados autómatas), en los que las entradas y salidas vienen restringidas por el conjunto finito de variables binarias 0 y 1. En este trabajo no se incidirá en este último tipo de sistemas, pues forma parte del control automático computacional y, más concretamente, se destinan al ámbito de la electrónica digital.

Partiendo de esta introducción, se puede observar otra clasificación para los sistemas según la linealidad de las ecuaciones que lo rigen. Gracias a la función de entrada-salida  $F$  se relaciona el valor de la variable  $y$  para los valores de  $u$  en un intervalo de tiempo  $(t_0, t)$ :

$$y(t) = F(u[t_0, t]) \quad (\text{Ec.4})$$

### 3.1.2. Sistema lineal/ no lineal

Los sistemas lineales son aquellos cuya función  $F$  cumple la propiedad de linealidad o superposición, es decir:

$$F(\alpha_1 u_1[t_0, t] + \alpha_2 u_2[t_0, t]) = \alpha_1 F(u_1[t_0, t]) + \alpha_2 F(u_2[t_0, t]) \quad (\text{Ec.5})$$

Donde  $\alpha_1, \alpha_2$  son números reales arbitrarios. En este estudio se asume la linealidad de las ecuaciones que rigen el comportamiento de los sistemas que se pretenden observar y/o controlar, ya que la teoría asociada es de carácter general y simple y, además, gran parte de la experiencia la admite.

### 3.1.3. Sistema continuo/ discreto

Otra posible clasificación, ya comentada con anterioridad, es la continuidad o discreción de un sistema, es decir, según las variables evolucionen de forma continua en el tiempo o lo hagan de forma puntual o discreta.

Se debe notar la importancia de ambos tipos de sistemas. Por un lado, la realidad física obliga a abstraer modelos matemáticos en tiempo continuo. Por otro lado, la implementación de sistemas (de control) que representan la realidad física, es llevada a cabo mediante elementos (computadoras) que trabajan en tiempo discreto, es decir, toman muestras en ciertos intervalos de tiempo.

## 3.2. Sistemas lineales dinámicos a coeficientes constantes

Una vez definido el marco en que se enfoca este estudio, se debe conocer la metodología y las herramientas necesarias para llevarlo a cabo. A tal efecto, se recurre al Álgebra Lineal para proceder de manera conveniente, diferenciando el caso de Sistemas Lineales Dinámicos en tiempo continuo y en tiempo discreto.

### 3.2.1. Sistemas Lineales Dinámicos en tiempo continuo

Una amplia clase de sistemas dinámicos lineales en tiempo continuo admite una representación matemática de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec.6})$$

En los que  $x, y$  e  $u$  son vectores de dimensión  $n, p$  y  $m$  respectivamente y  $A, B, C$  y  $D$  son matrices de dimensión  $n \times n, n \times m, p \times n$  y  $p \times m$  respectivamente. El vector  $x$  es el vector de estado del sistema. En la mayoría de las aplicaciones se tiene que  $D = 0$ , con lo que se podría prescindir de esta matriz.

Para realizar un estudio simplificado, se prescindirá de la dependencia del tiempo de las matrices  $A(t), B(t), C(t)$  y  $D(t)$ , con lo que el sistema será a coeficientes constantes. Así, el sistema a estudiar queda de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec.7})$$

Los sistemas dinámicos que admiten esta representación matemática reciben la denominación de *sistemas lineales diferenciales de dimensiones finitas*. A veces, con tal de simplificar la notación del sistema, se habla del cuádruple formado por las matrices, y se escribe como  $(A, B, C, D)$ , o a veces de forma mucho más simple se usa el símbolo  $\Sigma$  para designar los sistemas.

Para solucionarlos se deberá encontrar el vector  $y(t)$ , y, por, tanto, el vector  $x(t)$ . Como condición, será necesario conocer el vector  $x(0)$ , y así se hallarán las soluciones homogénea y forzada de las ecuaciones de estado citadas.

Solución homogénea (ver [6] para más detalles)

Para obtener la solución homogénea se debe imponer que el vector de entrada sea nulo, es decir,  $u(t) = 0$ . Así, el sistema resulta de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec.8})$$

Dicho sistema recibe el nombre de sistema homogéneo asociado.



Posteriormente, se deriva la ecuación

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

sucesivamente, por lo que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) = AAx(t) = A^2x(t)$$

...

$$x^{(k)}(t) = A^k x(t) \quad (\text{Ec.9})$$

De donde se observa que

$$x^{(k)}(0) = A^k x(0) = Ax_0$$

Como  $A^k$  existe para todo  $k$  finito,  $x(t)$  se puede expresar utilizando el desarrollo de Taylor como:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(t)|_{(t=0)} \cdot t + \frac{1}{2!} \ddot{x}(t)|_{(t=0)} \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{k!} x^{(k)}(t)|_{(t=0)} \cdot t^k \dots = x_0 + Ax_0 t + \frac{1}{2!} A^2 x_0 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k x_0 t^k + \dots = (I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \dots) x_0 \quad (\text{Ec.10})$$

El término entre paréntesis de la última igualdad recibe el nombre de matriz de transición de estados, y la notaremos por  $\phi(t)$ .

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \quad (\text{Ec.11})$$

Es importante notar la convergencia de dicha expresión, lo que asegura la existencia de la matriz de transición. Observamos también que se simplifica mucho el estudio para el caso en que la matriz  $A$  es diagonal, quedando de la forma:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} t^k = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.12}) \end{aligned}$$

Con lo que la respuesta homogénea resulta:

$$x(t) = \phi(t)x_0 = e^{At}x_0 \quad (\text{Ec.13})$$

$$y(t) = C\phi(t)x_0 = Ce^{At}x_0 \quad (\text{Ec.14})$$

La forma más usual de representar este espacio de soluciones es mediante la Transformada de Laplace :

Sea pues, la ecuación del sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t),$$

y se aplica la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} sx(s) - x(0) &= Ax(s) \\ (sI - A)x(s) &= x_0 \\ x(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 \end{aligned} \quad (\text{Ec.14})$$

Por lo que se deduce que en el dominio temporal:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x_0 \quad (\text{Ec.15})$$

La matriz de transición de estados se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}; \phi(s) = (sI - A)^{-1} \\ &(\text{Ec.16}) \end{aligned}$$

Así, finalmente la respuesta homogénea resulta:

$$\begin{aligned} y(t) &= C\phi(t)x_0 = Ce^{At}x_0 = C\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x_0 \\ &(\text{Ec.17}) \end{aligned}$$

Solución forzada (ver [6] para más detalles)

Para obtener la solución forzada se debe imponer que las condiciones iniciales sean nulas, es decir,  $x(0) = 0$ . Así, aplicando la Transformada de Laplace al sistema (Ec.7):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \right\}$$

resulta:

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) \quad (\text{Ec.18})$$

Se obtiene el espacio de soluciones en  $s$ :

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) = \phi(s)Bu(s) \quad (\text{Ec.19})$$

$$y(s) = C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s) \quad (\text{Ec.20})$$

Y en  $t$ :

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (\text{Ec.21})$$

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \quad (\text{Ec.22})$$

### Solución general

Dado que el sistema considerado es lineal, la respuesta total es la suma de la solución homogénea y la solución forzada. Así, el espacio de estados resulta (en dominio temporal y en el espacio  $s$ )

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ x(s) &= \phi(s)x_0 + \phi(s)Bu(s) \end{aligned} \quad (\text{Ec.23})$$

Y la salida:

$$\begin{aligned} y(t) &= C\phi(t)x_0 + \int_0^t C\phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t) \\ y(s) &= C\phi(s)x_0 + C\phi(s)Bu(s) + Du(s) \end{aligned} \quad (\text{Ec.24})$$

### **3.2.2. Sistemas Lineales Dinámicos en tiempo discreto**

Para los sistemas lineales dinámicos (SLD) en tiempo discreto (presentados en la introducción del capítulo 4), los resultados para obtener sus soluciones son análogos a los expuestos en el capítulo 3.2.1, en referencia a SLD en tiempo continuo. De igual forma se muestra a continuación el procedimiento para llegar a ellas.

Se tiene la representación del SLD en tiempo discreto:

$$\left. \begin{aligned} x(kT + T) &= Ax(kT) + Bu(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned} \right\} \text{ (Ec.25)}$$

En el que  $x(kT)$  es el vector de estados (de orden  $n$ ),  $u(kT)$  es la entrada del sistema e  $y(kT)$  es la salida. Las matrices  $A, B, C$  y  $D$  (de las cuales se ha prescindido de su dependencia del tiempo, puesto que el estudio se realiza a coeficientes constantes) son de dimensiones  $nxn, nxm, pxn$  y  $pxm$  respectivamente.

Así, para hallar la solución completa, se procederá a hallar por separado la solución homogénea y la solución forzada del sistema.

Solución homogénea (ver [6] para más detalles)

Se impone que la entrada sea nula, es decir,  $u(kT) = 0$ . El sistema a resolver queda:

$$\left. \begin{aligned} x(kT + T) &= Ax(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) \end{aligned} \right\} \text{ (Ec.26)}$$

Y se procede de forma recursiva para encontrar la matriz de transición de estados discreta:

$$x(T) = Ax(0) = Ax_0$$

$$x(2T) = Ax(T) = AAx_0 = A^2x_0$$

...

$$x(kT) = A^k x_0 \quad \text{(Ec.27)}$$

De donde finalmente, se define la matriz de transición de estados discreta:

$$\phi(kT) = A^k = A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{(Ec.28)}$$

Y la respuesta homogénea queda:

$$x(kT) = \phi(kT)x_0 = A^k x_0$$

$$y(kT) = C\phi(kT)x_0 = CA^k x_0 \quad \text{(Ec.29)}$$

También existe una forma alternativa de representar la solución, que consiste en la utilización de la Transformada Z para sistemas discretos.

Así, siendo (Ec.26):

$$x(kT + T) = Ax(kT)$$

se aplica la Transformada Z:

$$\begin{aligned} zx(z) - zx(0) &= Ax(z); (zI - A)x(z) = zx_0; \\ x(z) &= (zI - A)^{-1}zx_0 \end{aligned} \quad (\text{Ec.30})$$

Aplicando la antitransformada Z, el espacio en tiempo discreto queda:

$$\begin{aligned} x(kT) &= Z^{-1}\{(zI - A)^{-1}z\}x_0 \\ (\text{Ec.31}) \end{aligned}$$

Reescribiendo la matriz,

$$\begin{aligned} \phi(kT) &= A^k = Z^{-1}\{(zI - A)^{-1}z\} \\ \phi(z) &= (zI - A)^{-1}z \\ (\text{Ec.32}) \end{aligned}$$

La respuesta homogénea en tiempo discreto queda:

$$y(kT) = C\phi(kT)x_0 = CZ^{-1}\{(zI - A)^{-1}z\}x_0 \quad (\text{Ec.33})$$

Solución forzada (ver [6] para más detalles)

De igual manera que para el caso continuo, para hallar esta solución se debe imponer que las condiciones iniciales sean nulas, es decir,  $x(0) = 0$ , por lo que aplicando la transformada Z a ambos miembros de las expuestas ecuaciones

:

$$\left. \begin{aligned} x(kT + T) &= Ax(kT) + Bu(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec.25})$$

resulta:

$$\begin{aligned} zx(z) &= Ax(z) + Bu(z) \\ (zI - A)x(z) &= Bu(z) \\ x(z) &= (zI - A)^{-1}Bu(z) = z^{-1}\phi(z)Bu(z) \end{aligned}$$

(Ec. 34)

$$y(z) = Cx(z) + Du(z)$$

$$y(z) = C(zI - A)^{-1}Bu(z) + Du(z)$$

(Ec.35)

Por lo que el vector de estados del sistema resulta, en el dominio temporal:

$$x(kT) = \sum_{i=0}^{k-1} \phi(kT - T - iT)Bu(iT) \quad (\text{Ec.36})$$

Y la salida del sistema:

$$y(kT) = C \sum_{i=0}^{k-1} \phi(kT - T - iT)Bu(iT) + Du(kT)$$

(Ec.37)

### Solución general

Así, una vez obtenidas las distintas soluciones, la solución general del sistema será la suma de ambas, dado que se trata de un sistema de tipo lineal.

El espacio de estados resulta, en el dominio temporal y en el espacio  $z$ :

$$x(kT) = \phi(kT)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \phi(kT - T - iT)Bu(iT)$$

(Ec.38)

$$x(z) = \phi(z)x_0 + z^{-1}\phi(z)Bu(z)$$

(Ec.39)

Finalmente, la salida resulta, en el dominio temporal y en el espacio  $z$ :

$$y(kT) = C\phi(kT)x_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} \phi(kT - T - iT)Bu(iT) + Du(kT)$$

(Ec.40)

$$y(z) = C\phi(z)x_0 + Cz^{-1}\phi(z)Bu(z) + Du(z)$$

(Ec.41)

### 3.3. Estabilidad de SLD

El estudio de la estabilidad de los SLD es fundamental para asegurar un análisis correcto del sistema en cuestión, ya que, de otra forma, este carece de utilidad o aplicación práctica. En este subcapítulo se aborda toda la teoría necesaria para entender la estabilidad, así como dos criterios distintos para analizarla (uno basado en el Álgebra Lineal y otro basado en el método de Lyapunov).

#### 3.3.1. Definición de estabilidad y puntos de equilibrio

Se entiende por *estabilidad* de un sistema el hecho de responder con un determinado valor acotado frente a entradas también acotadas.

A continuación, se definen importantes conceptos asociados a la estabilidad de sistemas de la forma  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ .

(Siguiendo las definiciones de la referencia [6])

**Punto de equilibrio:** Aquel punto  $x_0$  que satisface la condición  $0 = f(x_0)$ .

**Punto de equilibrio estable:** Punto de equilibrio  $x_0$  que cumple  $\|x(t) - x_0\| < \delta$

para condiciones iniciales finitas  $\|x_0\| < M$ .

**Punto de equilibrio asintóticamente estable:** Punto de equilibrio  $x_0$  que cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| \rightarrow 0$$

para condiciones iniciales finitas  $\|x_0\| < M$ .

#### 3.3.2. Criterio algebraico para el análisis de estabilidad

Se define un punto de equilibrio para un sistema con entradas de la forma  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , para variables de estado  $x_0$  y entradas constantes en el tiempo  $u(t) = u_0$ :

$$0 = f(x_0, u_0) \quad (\text{Ec. 42})$$

Para SLD continuos (Ec.7), con  $x(0) = 0$ , se tiene que los puntos de equilibrio vienen dados, para entradas constantes  $u_0$ :

$$0 = Ax_0 + Bu_0 \quad (\text{Ec. 43})$$

Así, la evolución vendrá dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_0 \quad (\text{Ec. 44})$$

Y en torno al punto de equilibrio  $x_0$ , queda (sumando las dos ecuaciones anteriores) :

$$\dot{x}(t) = \frac{d(x(t)-x_0)}{dt} = Ax(t) + Bu_0 - (Ax_0 + Bu_0)$$

$$\frac{d(x(t)-x_0)}{dt} = Ax(t) + Ax_0 \quad (\text{Ec. 45})$$

con  $x(0) - x_0 = x_0 - x_0$

Si se define el error como  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0$ , se tiene que

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A \tilde{x}(t) \quad (\text{Ec. 46})$$

Así, se puede comprobar que la estabilidad para cualquier punto de equilibrio depende de la matriz  $A$ .

En el caso particular (y a la vez, más simple), en el que la matriz  $e^{At}$  converge, se tiene la matriz  $A$  diagonal, donde los elementos de la diagonal son los valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , se garantiza la estabilidad si se cumple la condición, ([7]):

$$\Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Ec. 47})$$

(Las matrices  $A$  verificando esta condición reciben el nombre de matrices Hurwitz).

De forma equivalente, en el espacio  $s$ , se debe cumplir  $\{C(sI - A)^{-1}B\} = \frac{n(s)}{d(s)}$ . Esta ecuación implica que  $s$  serán las raíces del denominador  $d(s)$  de dicha expresión polinómica, también llamados polos del sistema. Así, el sistema será estable para polos con parte real negativa.

Para sistemas homogéneos (entrada nula), el subespacio vectorial que determina el conjunto de puntos de equilibrio son los vectores  $v \in \text{Ker}(A - I)$ , es decir, vectores propios de valor propio 1. Es decir, dicho vector  $v$  verifica:

$$v = e^{At}v \quad (\text{Ec.48})$$

Para sistemas no homogéneos (entrada no nula), siendo  $\lambda_1$  el valor propio dominante (de módulo mayor) de  $A$ :

Si 1 no es valor propio de  $A$ , existe un único punto de equilibrio  $x_0$  tal que

$$x_0 = (I - A)^{-1}B \quad (\text{Ec. 49})$$

que es estable si y sólo si  $|\lambda_1| < 1$ .

Si  $|\lambda_1| = 1$ , entonces  $\lambda_1 = i^{\omega}$  y la solución es :



$$x(t) = x_0 + e^{ti\omega} \alpha_1 v_1, \text{ con } \alpha_1 \in \mathbb{R} \quad (\text{Ec. 50})$$

Donde  $v_1$  es el vector propio del valor propio  $\lambda_1$ .

Para los SLD en tiempo discreto, de forma análoga, se tiene que la estabilidad depende de la matriz  $A$ . En concreto,  $A^k$  debe converger. En el caso más simple, (Ec. 28), donde  $A^k$  es una matriz diagonal, la convergencia se cumple para:

$$|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Ec. 51})$$

(Las matrices  $A$  verificando esta condición reciben el nombre de matrices Schur).

### 3.3.3. Criterio de Lyapunov para el análisis de estabilidad

El enfoque de Lyapunov proporciona un método riguroso para abordar la estabilidad.

A continuación, hacemos una breve introducción a la teoría de Lyapunov para SLD para después generalizarla a SLDC.

Considerando el sistema lineal invariante en el tiempo dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad t \geq 0$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{Ec.52})$$

Se tiene el siguiente resultado.

**Teorema.** Para el sistema (Ec.52), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) el sistema es asintóticamente estable;
- ii) el sistema es exponencialmente estable;
- iii) la matrix  $A$  es Hurwitz (es decir si cada valor propio de  $A$  tiene su parte real estrictamente negativa)
- iv) la ecuación de Lyapunov

$$A^t P + P A = -Q \quad (\text{Ec.53})$$

tiene una única solución  $P > 0$  para cualquier matriz  $Q > 0$ ;

- v) la ecuación (Ec.53) tiene una única solución  $P > 0$  para alguna matriz  $Q > 0$ .

Esta última afirmación asegura la existencia de una función cuadrática de Lyapunov

$$V(x) = x^t P x \quad (\text{Ec. 54})$$

siendo  $P$  una forma cuadrática y definida positiva.

De manera análoga, para el caso discreto dado por:

$$x(k+1) = Ax(k) \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{Ec. 55})$$

Se tiene el siguiente resultado:

**Teorema:** Para el sistema (Ec.55), las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i) el sistema es asintóticamente estable;
- ii) el sistema es exponencialmente estable;
- iii) la matriz  $A$  es Schur (es decir si cada valor propio de  $A$  tiene módulo estrictamente menor que la unidad)
- iv) la ecuación de Lyapunov

$$P - A^t P A = Q \quad (\text{Ec.56})$$

Tiene una única solución  $P > 0$  para cualquier  $Q > 0$ ,

- v) la ecuación (Ec.56) tiene una única solución  $P > 0$  para alguna  $Q > 0$ .

Aplicando el criterio al caso general, supongamos que existe una función de Lyapunov cuadrática:

$$V(x) = x^t P x \quad (\text{Ec. 57})$$

**Teorema 1.** Una condición necesaria y suficiente que asegura la estabilidad del sistema es la existencia de una función diferenciable de Lyapunov de estado que constituye una función de Lyapunov.

**Teorema 2** (ver [5] para más detalles): Sea  $\dot{x} = f(x)$  y  $f(0) = 0$ . Si existe una función  $C^1$ ,  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que cumple:

- i)  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$
- ii)  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x$

iii)  $V(x) \rightarrow \infty$  si  $\|x\| \rightarrow \infty$

La única solución de  $\dot{x} = f(x)$  que cumple  $\dot{V}(x) = 0$  es  $x(t) = 0 \forall t$

Entonces el punto  $x = 0$  es (globalmente) asintóticamente estable.

## 3.4. Controlabilidad y observabilidad de SLD

### 3.4.1. Introducción

La descripción interna de un sistema dinámico lineal ofrece modelos para la representación de una amplia clase de sistemas que se hallan en la práctica. Dicha descripción es llevada a cabo mediante el comportamiento dinámico caracterizado por las matrices  $A, B, C$  y  $D$  (expuestas en el capítulo 4.2), que relacionan las variables de estado propias de cada sistema. Sin embargo, se prescinde de la matriz  $D$  a partir de este capítulo, debido a su escasa aparición en la mayoría de representaciones de sistemas. Así, las matrices de interés serán las  $A, B$  y  $C$ .

Asimismo, se pretenden extraer las relaciones existentes entre las variables o, más concretamente, la influencia que ejerce la entrada sobre el estado y el estado sobre la salida. Todo ello conlleva la formulación de dos cuestiones fundamentales: si es posible determinar el estado a partir de la observación de la salida y si es posible determinar una entrada que sea capaz de transferir el sistema de un estado a otro. La respuesta está en la controlabilidad y observabilidad de los sistemas, que son propiedades de la descripción interna.

Para estos conceptos se ha tomado como referencia [1].

### 3.4.2. Controlabilidad

El concepto de controlabilidad de un sistema hace referencia a la idea de transición entre estados, y cobra vital importancia en el estudio de los sistemas dinámicos debido a la relevancia que conlleva el concepto de *estado*. Un sistema será controlable si para cada transición entre estados existe una señal de entrada capaz de realizarla. El tiempo de transición es considerado finito y la señal de control se considera sin restricciones.

A continuación, se muestran las definiciones de los conceptos asociados a la controlabilidad de un sistema.

#### 3.4.2.1. Estados alcanzables, estados controlables, estados conectados.

El conjunto de estados alcanzables desde el estado  $x$ ,  $A_x$ , está formado por los elementos  $x_1 \in X$  para los que existe una señal de entrada  $u(t)$ , definida en un intervalo de tiempo  $(t_0, t_1)$  tal que:

$$\phi(t_1, t_0, x, u(t_0, t_1)) = x_1 \quad (\text{Ec.58})$$



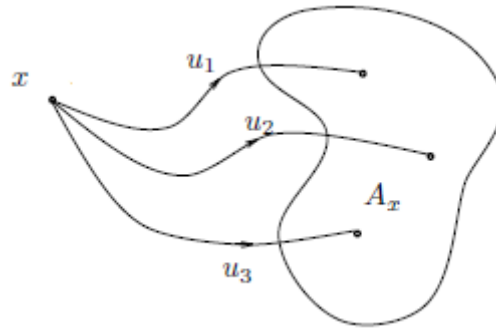


Figura 2. Conjunto de estados alcanzables desde  $x$ ,  $A_x$ . Adaptada de: [1]

El conjunto de estados controlables a  $x$ ,  $\mathcal{C}_x$ , está formado por los elementos  $x_1 \in X$  para los que existe una señal de entrada  $u(t)$  definida en un intervalo de tiempo  $(t_0, t_1)$  tal que:

$$\phi(t_1, t_0, x_1, u(t_0, t_1)) = x$$

(Ec.59)

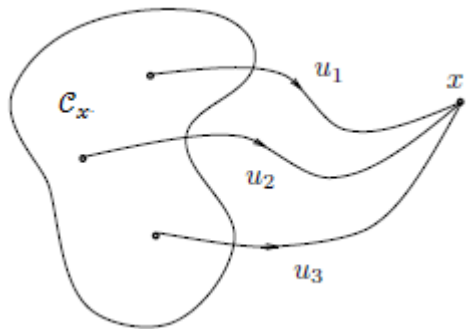


Figura 3. Conjunto de estados controlables desde  $x$ ,  $\mathcal{C}_x$ . Adaptada de [1]

El espacio de estados  $X$  de un sistema es conexo cuando para cada par de estados  $x_0, x_1 \in X$ , existe una señal  $u(t)$  definida en un intervalo de tiempo  $(t_0, t_1)$  tal que:

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u(t_0, t_1)) = x_1$$

(Ec.60)

Gracias a estas definiciones, se deduce que si el espacio de estados es conexo, el sistema será alcanzable y controlable a la vez.

### 3.4.2.2. Criterio de controlabilidad

Dado un sistema  $\Sigma$ , en tiempo continuo o discreto, y cuyo espacio de soluciones viene

determinado por las ecuaciones Ec.23 y Ec.38 (Ec.39 en  $z$ ), respectivamente, este será controlable si las matrices  $A$  y  $B$  del sistema cumplen el siguiente teorema.

**Teorema:**  $\Sigma$  es controlable si y sólo si:

$$\text{rango } \mathcal{C} = n$$

Siendo  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} \equiv (B : AB : \dots : A^{n-1}B) \quad (\text{Ec.61})$$

Y

$$n = \dim X$$

La matriz  $\mathcal{C}$  se denomina matriz de controlabilidad.

### 3.4.2.3. Transformación a FCC

Se toma como referencias [6] y [15] para las definiciones que siguen.

Con tal de abordar el problema de controlabilidad de un sistema, se descompone el espacio de estados  $X$  en subespacios controlables y no controlables, de manera que se deberá transformar el sistema inicial en uno equivalente. Esta forma se denomina Forma Canónica Controlable (FCC), y viene dada por el conjunto de matrices  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ . La propiedad de controlabilidad del sistema referente al par  $(A, B)$  expuesta en la Ec. 61 es condición necesaria y suficiente para que el sistema se encuentre en la FCC. En caso contrario, es necesario realizar las transformaciones apropiadas para llegar a este sistema equivalente, y así hallar la forma controlable para el sistema.

Siendo  $T$  la matriz de transformación, con  $\mathcal{C}$  la matriz de controlabilidad, se tiene:

$$T = \mathcal{C}W$$

En que  $W$  toma la forma:

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \bullet & \bullet & \bullet & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ a_{n-1} & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo los coeficientes  $a_i$  del sistema, y, aplicando las propiedades de las matrices para el cálculo de determinantes, en concreto, de los menores de la matriz (ver [7] para más detalle):

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Se define  $\hat{x}$  como un nuevo vector de estado  $x = T\hat{x}$

Si el sistema tiene estado completo controlable, la matriz  $T$  es invertible (no singular).

Gracias a la matriz  $T$  se puede trasladar el espacio de estados a uno equivalente, que será la forma canónica controlable (FCC):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \\ y &= CT\hat{x} + T^{-1}Du \end{aligned} \right\} \text{(Ec.62)}$$

Para el caso  $n = 2$ , se tienen las matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  (la matriz  $\bar{C}$  no está restringida):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \text{(Ec.63)}$$

Que resultan de la forma:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{(Ec.64)}$$

El espacio de estados  $\bar{X}$  del sistema se descompone en los subespacios controlable  $X_1$  y no controlable  $X_2$ :

$$X = X_1 \oplus X_2$$

Por lo que el sistema se puede descomponer fácilmente, por inspección directa, en sus formas controlable y no controlable:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1u \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{22}\bar{x}_2 \\ y &= c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 \end{aligned} \text{(Ec.65)}$$

### 3.4.2.4. Ejemplos de sistemas controlables

- **Ejemplo 1 (Sistema no controlable)**

Se tiene un SLD en tiempo continuo cuyo diagrama es el mostrado en la Figura 4.

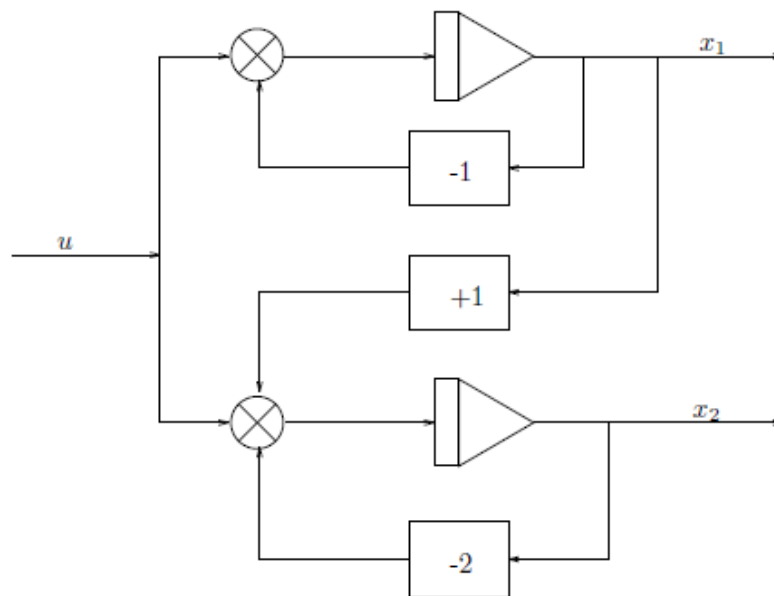


Figura 4: Ejemplo de sistema no controlable. Fuente: [1]

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u$$

Se pueden obtener por inspección directa las matrices  $A$  y  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de controlabilidad queda:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Y su determinante es igual a 0, es decir,  $\mathcal{C}$  no tiene rango máximo, no cumple la condición descrita en la Ec. 61.

Esta afirmación equivale a decir que el sistema de ecuaciones resultante de transferir el espacio de estados desde un estado inicial arbitrario  $x_0$  hacia otro estado deseado (por ejemplo, al origen) mediante una o varias secuencias de entradas  $u$ , no es compatible y, por lo tanto, no tiene solución. Se concluye, por lo tanto, que este sistema concreto es no controlable, puesto que no se cumple el criterio de controlabilidad; aunque, paradójicamente, se pueda pensar mediante la inspección del diagrama de la Figura 4 que sí lo es.

### • Ejemplo 2 (Sistema Controlable)

Se tiene un circuito RLC, en que las variable de estado son la tensión en el condensador,  $v_C$ , y la intensidad en la inductancia,  $i_L$ . La entrada es la tensión de alimentación del circuito,  $v_S$ , y la salida es la tensión en bornes de la inductancia,  $v_x$ . Así, el sistema de ecuaciones que rige el circuito es:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_S$$

$$v_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + v_S.$$

Se trata de un sistema de orden  $n = 2$ , con una sola entrada y una sola salida.

La matriz  $\mathcal{C}$  de controlabilidad queda de la forma

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLC} \end{bmatrix}.$$

Y su rango se puede obtener mediante el determinante:

$$\begin{aligned} \det \mathcal{C} &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{R^2C^2} + \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RLC} \end{bmatrix} = -\frac{1}{R^2LC^2} + \frac{2}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C} \\ &= \frac{1}{R^2LC^2} - \frac{1}{L^2C}. \end{aligned}$$

Que es igual a 0 si  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Por lo que, el sistema es controlable según la condición expuesta en la Ec. 61 ( $\mathcal{C}$  es de rango máximo:  $\text{rango}(\mathcal{C}) = n = 2$ ) para todo valor de  $R$  distinto a  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Únicamente será no controlable para valores de  $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .



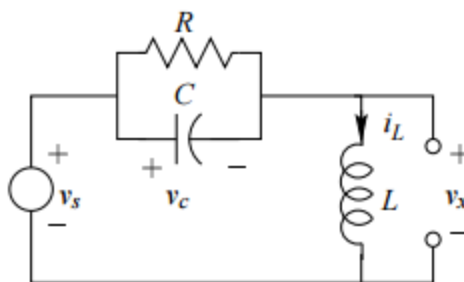


Figura 5: Sistema RLC controlable. Fuente: [3]

### 3.4.3. Observabilidad

La observabilidad se refiere a la posibilidad de reconstrucción del estado a partir de la medida de las señales de salida y de entrada. Existen dos maneras para llevarlo a cabo: una de ellas trata de deducir el valor del estado en el instante presente a partir de las observaciones pasadas, y la otra trata de deducir el valor del estado en un instante determinado a partir de observaciones posteriores. A continuación se detallan las definiciones que ayudan a aclarar esta problemática.

**Definición de Sistema observable:**

Un sistema se dice observable en el instante  $t_0$ , si y sólo si para todo estado  $x(t_0) \in X$ , existe un tiempo  $t > t_0$  tal que el conocimiento de  $u(t_0, t)$ , de  $y(t_0, t)$  y de  $(A, C)$  basta para determinar  $x(t_0)$ .

**Definición de Sistema reconstructible:**

Un sistema se dice reconstructible en  $t_0$ , si y sólo si si para todo estado  $x(t_0) \in X$ ,  $t < t_0$  tal que el conocimiento de  $u[t, t_0]$ , de  $y[t, t_0]$  y de  $(A, C)$  basta para determinar  $x(t_0)$ .

Para sistemas invariantes en el tiempo, las dos definiciones son equivalentes, por lo que se hablará de sistemas observables a partir de ahora.

#### 3.4.3.1. Criterio de observabilidad

Dado un sistema  $\Sigma$ , en tiempo continuo o discreto, y cuyo espacio de soluciones viene determinado por las ecuaciones Ec.23 y Ec.39, respectivamente, este será observable si las matrices  $A$  y  $C$  del sistema cumplen el siguiente teorema.

**Teorema:**  $\Sigma$  es observable si y sólo si:

$$\text{rango } \mathcal{O} = n$$

Siendo  $\mathcal{O} =$

$$\mathcal{O} = \left( C^T \ A^T \ C^T \ \dots \ (A^{n-1})^T \ C^T \right)^T \quad (\text{Ec. 66})$$

y  $n = \dim x$ .

(Para cada matriz M,  $M^T$  denota la matriz traspuesta de la matriz M).

El concepto de observabilidad es dual del concepto de controlabilidad en el sentido de que  $(A, C)$  es observable si y sólo si  $(A^T, C^T)$  es controlable.

### 3.4.3.2. Transformación a FCO

Se toma como referencias [6] y [15] para las definiciones que siguen.

Con tal de abordar el problema de observabilidad de un sistema, procediendo de manera análoga a la controlabilidad, se descompone el espacio de estados  $X$  en subespacios observables y no observables. Se pretende llegar a una forma del sistema tal que por inspección directa dichos estados sean fácilmente reconocibles. Esta forma es la Forma Canónica Observable (FCO), y la transformación del sistema hacia ella es práctica cuando no se cumple la condición de observabilidad del par  $(A, C)$  de la Ec. 66.

Sea  $Q$  la matriz de transformación, con  $\mathcal{O}$  la matriz de observabilidad. Se tiene  $Q = (W\mathcal{O})^{-1}$

Y definiendo el nuevo espacio de estados  $\bar{x}$  tal que  $x = Q\bar{x}$ , el sistema resulta:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= Q^{-1}AQ\bar{x} + Q^{-1}Bu \\ y &= CQ\bar{x} + Q^{-1}Du \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ec. 67})$$

Para el caso  $n = 2$ , se tendrán las matrices  $\bar{A} = Q^{-1}AQ$  y  $\bar{C} = CQ$ . Que resultan de la forma (la matriz  $\bar{B}$  no está restringida):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 68})$$

Bajo la demostración análoga al caso de controlabilidad, se tiene el sistema descompuesto en

sus partes observable y no-observable, de manera:

$$\bar{\dot{x}} = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{B}_1u$$

$$\bar{\dot{x}}_2 = \bar{A}_{21}x_1 + \bar{A}_{22}x_2 + \bar{B}_2u$$

$$y = \bar{C}_1\bar{x}_1 \quad (\text{Ec. 69})$$

### 3.4.3.3. Ejemplos de sistemas observables

- Ejemplo 1 (Sistema observable)**

Sea el sistema planteado en el ejemplo 2 del apartado de controlabilidad (ver Figura 5: Circuito RLC). Se tiene que la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{RC} & -\frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante es  $\frac{1}{C}$ , es decir, es siempre de rango máximo, con lo que el sistema será siempre observable independientemente del valor que tomen los parámetros del circuito.

- Ejemplo 2 (Discusión de la observabilidad)**

Sea el sistema de posicionamiento de un cilindro, de inercia unitaria, sometido a un par  $u(t)$ , suponiendo que el rozamiento sea despreciable. Este sistema representa una versión idealizada del problema del posicionamiento de un satélite en un plano. Sus ecuaciones se pueden escribir:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Supongamos en primer lugar que la salida del sistema es la posición angular del cilindro, es decir  $x_1(t)$ :

$$y = [1 \ 0]x$$

Si se deja evolucionar libremente, a partir de unas condiciones iniciales  $x_1(0)$ ;  $x_2(0)$ , el cilindro girará a velocidad constante. Si se registrara la salida en el período  $(0, T)$  se obtendría una recta inclinada como la de la Figura 6. De este registro se pueden obtener fácilmente la velocidad (la pendiente de la recta) y la posición angular (la coordenada en el origen).

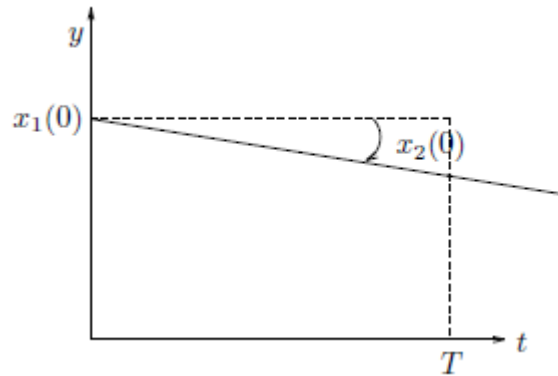


Figura 6. Trayectoria del sistema. (Ejemplo de observabilidad) Fuente: [1]

Por tanto a partir del registro de la salida  $y(t)$  es posible reconstruir el estado inicial del sistema. El sistema es por tanto observable.

2. Supongamos ahora que la salida es la velocidad de salida del sistema. En tal caso la ecuación de transición entre estados es la misma, pero la salida varía, ya que  $y(t)$  será ahora  $x_2(t)$ :

$$y = [0 \ 1]x$$

Ahora la salida representada resulta una recta horizontal, ya que en virtud del principio de inercia la velocidad de rotación del cilindro permanece constante. Se tendrá, entonces, la evolución de la salida que se indica en la Figura 7, de la que se obtiene inmediatamente la velocidad inicial (que es la ordenada de la recta), pero no se puede obtener su posición. El sistema, en este caso, no es observable.

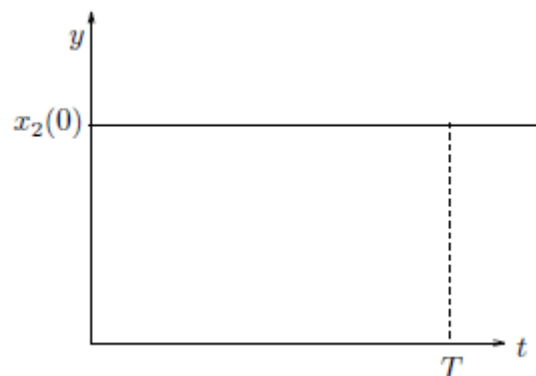


Figura 7: Evolución de la velocidad del sistema. (Ejemplo de no-observabilidad) Fuente: [1]

## 4. Sistemas Lineales Dinámicos Conmutados

En este capítulo se exponen las características fundamentales de los sistemas lineales dinámicos conmutados para, posteriormente, analizar algunos casos prácticos concretos. La teoría se ha basado fundamentalmente en [16], y se ha complementado con [4], [9], [10], [12] y [13].

Los Sistemas Lineales Dinámicos Conmutados (SLDC) son sistemas dinámicos híbridos, compuestos por una familia de Sistemas Lineales (SLD) que conmutan entre sí de acuerdo a algunas reglas discretas. El término *sistema híbrido* se usa para denotar a un sistema discontinuo. La evolución discreta suele estar típicamente modelada por autómatas finitos, redes de Petri, cadenas de Markov o una señal de conmutación externa. Es decir, se trata de sistemas que contienen tanto dinámicas continuas como elementos discretos. (ver [16])

Recientemente, los SLDC han tomado importancia en la comunidad científica tanto de control como de computación, debido a su gran capacidad para capturar la dinámica continua y discreta de sistemas complejos (redes biológicas, sistemas tolerantes a fallos, sistemas de manejo de tráfico aéreo, entre otros). Como consecuencia, la necesidad de estudiar sus propiedades fundamentales, tales como observabilidad, controlabilidad y estabilidad, se ha convertido en un tema importante. Por ello, en este capítulo se aborda toda la teoría relacionada a la conmutación de sistemas lineales, su clasificación y sus formas de observarlos y controlarlos que existen.

### 4.1. Definición de SLDC

Tal como se ha expuesto en el punto anterior, el término *híbrido* asociado al tipo de sistemas que se tratan en este capítulo, hace referencia a sistemas discontinuos. De tal modo, se debe exponer una breve introducción a este nuevo concepto:

Para este tipo de sistemas la bibliografía no es tan extensa como en el caso de los sistemas SLD, aunque en estos últimos años están apareciendo muchos artículos que tratan estos sistemas desde diferentes puntos de vista. Para las definiciones que siguen se toman como referencias [13] y [4].

#### **Definición de Sistema dinámico discontinuo**

Los sistemas (dinámicos) discontinuos son aquellos que admiten una descripción en términos de ecuaciones explícitas diferenciables o en diferencias tales que:

$$\dot{x} = f(x, t) \text{ (ó } x_{n+1} = f(x_n, t_n) \text{ )} \quad (\text{Ec.70})$$

Donde  $f \in \{f_1, \dots, f_m\}$  para algún  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $(x, x_n)$  y  $(t, t_n)$  definidas apropiadamente.

Se habla de un sistema discontinuo *bien definido* si  $\forall t \geq 0$  existe un único  $f_i$   $i \in 1, 2, \dots, m$  activado.

Un sistema híbrido (discontinuo) describe trayectorias discontinuas por tramos, las cuales pueden ser continuas o continuas por tramos. En el primer caso, al sistema se le llama conmutado continuo o simplemente conmutado, y los instantes de cambio de campo vectorial son los instantes de conmutación; mientras que en el segundo, el sistema se denomina impulsivo y las trayectorias presentan brincos o discontinuidades por medio de efectos impulsivos. En la Figura 8 se observan las diferencias entre ambos sistemas.

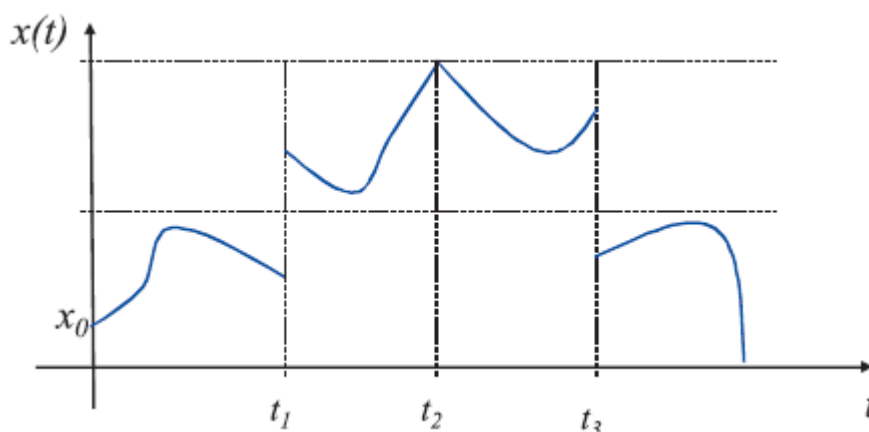


Figura 8. Trayectoria de un sistema híbrido. Fuente: [13]

Observamos que en  $t_1, t_2, t_3$ , las trayectorias son no diferenciables; aunque en  $t_1$  y en  $t_3$  el sistema presenta comportamiento impulsivo, mientras que en  $t_2$  el comportamiento conmutado es continuo.

### **Definición de Sistema Conmutado**

Los sistemas conmutados son aquellos compuestos por una familia de subsistemas y cualquiera de las siguientes (ley de conmutación, criterio de conmutación, secuencia de conmutación o señal de conmutación) que tienen como función determinar el modo activo. Es evidente que estos sistemas son multi-modelo por naturaleza. Así, cada uno de los componentes individuales se denomina subsistema o modo del sistema conmutado. Por otro lado, es necesario un dispositivo de conmutación, denominado *supervisor*, que tiene como función generar la regla de conmutación  $\sigma$  que orquesta la conmutación entre los subsistemas. La figura del supervisor puede tener relevancia en sistemas electrónicos digitales tales como autómatas, en que el multiplexor es el dispositivo que genera la señal de conmutación. En este trabajo no se enfatizará este concepto puesto que el estudio se centra en otros aspectos. En la Figura 9 se puede observar un esquema general de los sistemas conmutados, en que se han añadido las perturbaciones  $d$  (entradas no controladas) como elementos del sistema.

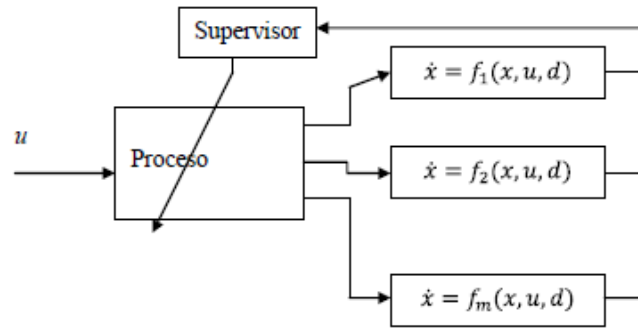


Figura 9. Esquema genérico de un SC Fuente: [4]

La regla de conmutación puede existir de diversas maneras, según el sistema tratado. En primer lugar, la ley de conmutación se trata de una función constante por tramos que puede ser dependiente del tiempo y/o del estado. En segundo lugar, el criterio de conmutación es una descripción que puede venir dada tanto por ecuaciones como por reglas o algoritmos. En último lugar, la secuencia y la señal de conmutación dependen únicamente del tiempo, siendo la señal una función constante por tramos dependiente del tiempo, mientras que la secuencia es el conjunto de pares que describen los modos activos a lo largo del tiempo.

Así, una vez presentados los modos de conmutación existentes, este trabajo se va a centrar fundamentalmente en las señales de conmutación como elementos que trasladan el estado del sistema considerado y que dependen, además, del tiempo y/o del estado del sistema.

### Definición de Sistema Lineal Conmutado

Los Sistemas Lineales Conmutados (SLDC) son sistemas híbridos que constan de varios subsistemas lineales y una regla que orquesta la conmutación entre ellos.

Denotando por  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , el cuerpo de los números reales y complejos respectivamente,  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ,  $M_{n \times m}(\mathbb{C})$  los conjuntos de matrices de orden  $n \times m$  a coeficientes reales y complejos  $\mathbb{R}$ . Un SLDC es un sistema dinámico híbrido donde  $F = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  es una colección de sistemas lineales (SLD),  $M = \{M_1, \dots, M_m\}$  el conjunto de estados discretos y  $\sigma_t : [t_0, T) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  la señal de conmutación que determina, a cada instante de tiempo, el estado discreto.

$$\sigma(t) = \begin{cases} M_1 & t \in [t_0, t_1) \\ M_2 & t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \\ M_m & t \in [t_{m-1}, T) \end{cases} \quad (\text{Ec.71})$$

Se hablará a partir de ahora de señales de conmutación constantes por tramos (y definidas en un intervalo de tiempo concreto), conocidas como *switching path*.

Matricialmente se puede expresar (en el caso continuo) como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_{\sigma(t)}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.72})$$

En forma discreta se escriben:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + B_{\sigma(k)}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = C_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (\text{Ec.73})$$

En este trabajo, se tratan los SLDC invariantes en el tiempo, es decir, donde los subsistemas tienen parámetros independientes del tiempo en las matrices correspondientes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

## 4.2. Solución de SLDC

Se expone a continuación una introducción teórica sobre la solución de los SLDC tomando como referencias los textos de los autores Sun, Ge [16], J. Hespanya [10] y J. Maldonado[12].

Se tiene un tipo de SLDC (Ec. 55), de los cuales se elige el más sencillo de todos para exponer las propiedades fundamentales y hacer hincapié en la discusión de su análisis:

$$\begin{aligned} f_m: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, m \in M \\ \sigma: [0, \infty) &\rightarrow M \end{aligned} \quad (\text{Ec. 74})$$

En que  $f_m$  es el conjunto de subsistemas lineales, y  $\sigma$  la señal de conmutación (Switching path), del sistema global, que puede ser dependiente del tiempo o dependiente del tiempo y el estado del sistema.

### 4.2.1. Señal de conmutación dependiente del tiempo

Siguiendo la definición de la (Ec. 74). Sea el caso más sencillo, en que la señal de conmutación  $\sigma$  tiene un número finito de discontinuidades definidas para todos los intervalos de tiempo acotados. El objetivo de la señal  $\sigma$  es especificar, en cada instante de tiempo, el índice  $\sigma(t) \in M$  del *subsistema activo*, esto es, el subsistema de la familia para el índice indicado por la señal de conmutación. Se asume que  $\sigma(t)$  es continua por la derecha para todo el conjunto índice:  $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau)$  para cada  $\tau \geq 0$ . En la Figura 10 se observa un ejemplo en que  $M = \{1,2,3\}$ .



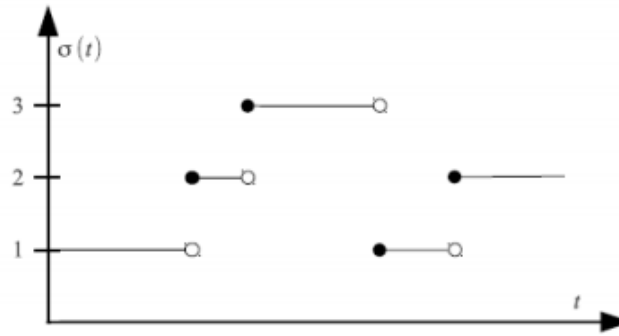


Figura 10. Señal de conmutación dependiente del tiempo

Así, la solución para estos sistemas será la solución del SLD (Ec. 23) para tiempo continuo o Ec. 38 para tiempo discreto correspondiente al subsistema activo, determinado por el índice  $i \in M$ .

#### 4.2.2. Señal de conmutación dependiente del estado

Siguiendo la definición de la (Ec. 74). En este caso, se habla de señales de conmutación dependientes del estado, cuyo análisis no es tan trivial como el del caso anterior. Sea:

$$S = \{\sigma: N_\sigma(\tau, t) \leq 1 + (t - \tau), \forall t > \tau \geq 0\} \quad (\text{Ec. 75})$$

el conjunto de señales de conmutación

$$\sigma: [t_0, t_1) \mapsto M. \quad (\text{Ec. 76})$$

En el que  $\sigma$  es una señal constante definida a trozos, definida en el intervalo  $[t_0, t_1)$  para todo tiempo  $t: t_0 < t_1 \leq \infty$ . Se tiene que  $S$  se corresponde, además, con el número de discontinuidades de  $\sigma$ , o número de instantes de conmutación.

Para cada  $x$  sólo puede haber un  $\sigma$  admisible. Así, una solución del sistema es cualquier par de valores  $(\sigma, x)$ , con  $\sigma \in S$ , y siendo  $x$  una solución del sistema:

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x) \quad (\sigma, x) \in S \quad (\text{Ec. 77})$$

Una solución para el sistema conmutado es cualquier  $(\sigma, x) \in S$  para:

- Todo intervalo abierto en que  $\sigma$  es constante, y  $x$  es solución para  $\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x)$ .
- Todo intervalo de conmutación  $t, x(t) = \rho(\sigma(t), \sigma^-(t), x^-(t))$ .

### 4.2.3. Solución del sistema

A partir del SLDC (Ec. 74) se expone la solución del sistema, es decir, se determina el espacio de estados  $x(t)$  o  $x(kT)$ , según sea la matriz de transición de estados  $\phi(t; t_0, x_0, u, \sigma)$  o  $\phi(kT; k, x_0, u, \sigma)$ . En forma continua, se desprende de la Ec.23:

$$x(t) = \phi(t; t_0, x_0, u, \sigma) = \Phi(t, t_0, \sigma, x_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, \sigma, x_0)u(\tau)d\tau. \quad (\text{Ec. 78})$$

De forma análoga, para el caso discreto, para un sistema de la forma (Ec..54), se desprende de la Ec.38:

$$x_k = \Phi(k, 0, \sigma)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k, j, \sigma)u_j. \quad (\text{Ec. 79})$$

Cabe destacar que, a diferencia de los SLD, cuya solución viene dada por las condiciones iniciales del estado, los SLDC tienen tantas soluciones, para cada estado inicial, como señales de conmutación  $\sigma$  admisibles del sistema.

### 4.3. Estabilidad de SLDC

La estabilidad para los SLDC es una generalización de la teoría expuesta en el capítulo 4.3. Se toma [16] como referencia para las definiciones que siguen.

De manera general, la estabilidad de los SLDC se entiende en el sentido de que el sistema sea estable para cualquier señal de conmutación que lo rige. Esto es, para el caso continuo y para cada  $\theta: [t_0, \infty) \rightarrow M$ , el sistema

$$\dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) \quad t \geq 0 \quad (\text{Ec.80})$$

es estable.

Para el caso discreto y para  $\theta: N \rightarrow M$ , el sistema

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) \quad k \geq 0 \quad (\text{Ec.81})$$

es estable.

Uno de los principales problemas con respecto a la estabilidad del sistema conmutado, es que

no sólo se debe realizar el análisis de la estabilidad a un sistema lineal, sino a toda la familia de subsistemas que conforman el sistema conmutado. Además, hay que tener en cuenta que la estabilidad de todos los subsistemas de manera independiente no es suficiente garantía para la estabilidad global del sistema ante posibles conmutaciones que sean desconocidas y/o arbitrarias, tal y como se puede observar en la Figura 11 en la que se muestran las trayectorias de dos sistemas aleatorios asintóticamente estables. Si se considera la unión de estos dos sistemas junto con una ley de conmutación se tiene un sistema conmutado que puede, o no, ser estable, dependiendo de los instantes de conmutación.

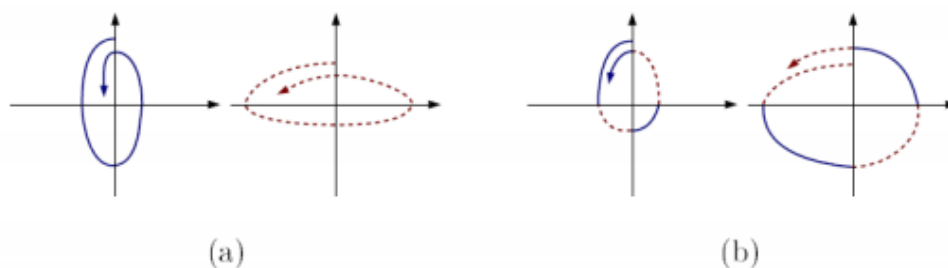


Figura 11. Efecto de la ley de conmutación en la estabilidad de un sistema conmutado. (a) Dos subsistemas aleatorios estables de un sistema conmutado. (b) Instantes de conmutación que hacen el sistema conmutado estable (izquierda) e inestable (derecha). Fuente [12]

Es por tanto de vital importancia determinar el tipo de conmutación que se establece entre subsistemas para ver la relación de variables que existe entre ellos. A tal efecto, existen tantos posibles casos a estudiar como posibles modelizaciones de SLDC se consideren, incluso para un mismo sistema concreto. Este apartado se desarrollará con más claridad en el ejemplo de aplicación práctica del capítulo 6 de este trabajo.

#### 4.3.1. Criterio algebraico para el análisis de estabilidad

Para que se cumpla la condición de estabilidad de los SLDC, una condición necesaria y suficiente es la expuesta en el apartado 4.3. (estabilidad de SLD), referente a la matriz  $A$  del sistema.

#### 4.3.2. Criterio de Lyapunov para el análisis de estabilidad

Para los subsistemas:

$$A_i^t P + P A_i \leq 0 \quad i \in M. \quad \text{[c. 82]}$$

Se tiene el siguiente resultado, resultado de la aplicación del criterio de Lyapunov aplicado a los SLD:

**Teorema.** Una condición necesaria y suficiente que asegura la estabilidad del sistema es la existencia de una función diferenciable de Lyapunov de estado que constituye una función de Lyapunov para todos los subsistemas.

Siendo la función de Lyapunov acorde a los teoremas 1 y 2 del apartado 3.3.3, referente a la estabilidad de SLD en forma general.

## 4.4. Controlabilidad y observabilidad de SLDC

### 4.4.1. Controlabilidad de SLDC

Al igual que para el caso de la estabilidad, se toma como referencia las definiciones de la referencia [16]

Sea un SLDC en tiempo continuo como el descrito en la Ec. 72 (o, en el caso discreto, como en la Ec. 73).

Se tiene una señal de conmutación  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow M$ , del tipo como Switching Path, una entrada  $u$  definida en el intervalo  $[t_0, t_f]$ , y se elige un instante  $t_f > t_0$ . Se dice que, a través de  $\sigma$ , el estado  $x \in \mathbb{R}^n$  es:

**Alcanzable si:**

$$\phi(t_f; t_0, x, u(t_0, t_f), \sigma) = x_f \quad (\text{Ec. 83})$$

Siendo el conjunto de estados alcanzables:

$$\mathcal{R}_\sigma(C_i, A_i, B_i)_M \quad (\text{Ec. 84})$$

**Controlable si:**

$$\phi(t_f, t_0, x_f, u(t_0, t_f), \sigma) = x \quad (\text{Ec. 85})$$

Siendo el conjunto de estados controlables:

$$\mathcal{C}_\sigma(C_i, A_i, B_i)_M \quad (\text{Ec. 86})$$

*Observación:* el sistema se dice completamente alcanzable/controlable si el respectivo conjunto alcanzable/controlable es  $\mathbb{R}^n$ .

**Conjunto múltiple controlable:**

Sea  $\mathcal{B}$  el subespacio vectorial formado por las imágenes de  $B_i$  es decir:

$$\mathcal{B} = \sum_{i \in M} \text{Im}\{B_i\} \quad (\text{Ec } 87)$$

Se define  $\mathcal{V}$  como el conjunto múltiple controlable de  $(A, \mathcal{B})$ . Esto es,  $\mathcal{V}$  es el mínimo subespacio invariante para cada  $A_i$  y contiene cada  $\text{Im}\{B_i\}$  para cada  $i \in M$ . Recordemos que, tomando como referencia [7], un subespacio  $H$  perteneciente a  $E$  se dice invariante por  $f$  si para todo  $x \in H$ ,  $f(x) \in H$ . Es decir, de manera “llana”, se entiende que un subespacio es invariante por alguna aplicación lineal si la imagen de sus vectores vuelve al subespacio de donde provienen, es decir, “no se salen del subespacio”. De forma matricial, se tiene:

$$\mathcal{V} = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{n-1} \in \underline{n} \\ i_0, \dots, i_{n-1} \in M}} A_{i_{n-1}}^{j_{n-1}} \cdots A_{i_1}^{j_1} B_{i_0}. \quad (\text{Ec } 88)$$

Así, si el sistema es controlable o alcanzable (conexo), se tiene que:

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^n \quad (\text{Ec } 89)$$

A continuación se detallan las propiedades fundamentales equivalentes, para analizar la controlabilidad bajo señales de conmutación tipo Switching Path:

- i) El sistema es completamente alcanzable
- ii) El sistema es totalmente controlable

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$$

Así, el SLDC es **controlable** si para cualquier par de estados  $x_0, x_f$  arbitrarios, existe un instante de tiempo  $t_f > 0$  tal que, bajo una señal tipo Switching Path  $\sigma: [t_0, t_f] \rightarrow M$  y una entrada  $u[t_0, t_f]$ , se cumple:

$$x(t_f; 0, x_0, u, \sigma) = x_f$$

El SLDC es alcanzable si existe una señal de conmutación  $\sigma$  para un instante de tiempo  $T > 0$ , tal que existe un instante de tiempo  $t_f \leq T$ , y se cumple la ecuación Ec. 62.8. Es decir, se puede alcanzar un estado deseado bajo una señal de conmutación determinada.

Así, para una señal fija de conmutación, la alcanzabilidad y la controlabilidad coinciden.

$$\mathcal{C}_\sigma(A_i, B_i)_M = \mathcal{R}_\sigma(A_i, B_i)_M = \mathcal{V} \quad (\text{Ec. } 90)$$

De forma análoga a la explicación del capítulo 3.4.2, el criterio de controlabilidad para estos sistemas es (equivalente a la Ec. 89):

$$\text{rank}[B_1, \dots, B_m, A_1 B_1, \dots, A_m B_1, \dots, A_1 B_m, \dots, A_m B_m, \\ A_1^2 B_1, \dots, A_m A_1 B_1, \dots, A_1^2 B_m, \dots, A_m A_1 B_m, \dots, \\ A_1^{n-1} B_1, \dots, A_m A_1^{n-2} B_1, \dots, A_1 A_m^{n-2} B_m, \dots, A_m^{n-1} B_m] = n. \quad \text{Ec. 91)}$$

#### 4.4.2. Observabilidad de SLDC

El carácter observable tiene que ver con lo que se puede decir sobre el estado inicial cuando se observan las salidas del sistema, clasificando los estados en observables y no observables.

Un estado  $x$  es no observable (o no reconstructible, al tratarse de sistemas invariantes en el tiempo), si bajo una señal de conmutación  $\sigma$  existe una entrada  $u(t_0, t_f)$ , tal que la salida no permite diferenciar de qué estado se trata, confundándose este con otro posible estado  $x_1$ . Así, bajo esta formulación:

$$C_\sigma \phi(t_f; t_0, x, u(t_0, t_f), \sigma) = C_\sigma \phi(t_f; t_0, x_1, u(t_0, t_f), \sigma) \quad \text{(Ec. 92)}$$

Luego se desprende el conjunto de estados no observables como el conjunto de todos los estados no observables y se denota por:

$$\mathcal{UO}_\sigma(C_i, A_i, B_i)_M \quad \text{(Ec. 93)}$$

El sistema se dice que es completamente observable si no existe ningún estado inicial no nulo que no es observable.

#### 4.4.3. Dualidad de estados controlables-observables

Para un SLDC, se tiene, de forma análoga a la explicación dada para SLD, que las siguientes características son equivalentes:

- i) El sistema es completamente observable (reconstructible)
- ii) El sistema  $\Sigma(A_i^T, C_i^T)_M$  es completamente controlable (y alcanzable)
- iii)  $\mathcal{O} = \mathbf{R}^n$  (Ec. 66)

Denotando el sistema  $\Sigma(A_i^T, C_i^T)_M$  como el sistema dual de  $\Sigma(C_i, A_i)_M$ , se tiene, bajo el principio de dualidad (ya anunciado en la sección correspondiente a los SLD), que la observabilidad (reconstructibilidad) completa de un sistema es igual a la controlabilidad (y alcanzabilidad) completa de su sistema dual.

Para el caso en tiempo discreto, los mismos criterios son aplicables.

## 5. Caso de estudio: Circuito RLC

En este capítulo se abordan dos casos prácticos de sistemas que se pueden modelizar, mediante ecuaciones diferenciales, como sistemas lineales dinámicos. En realidad, ambos casos son variantes de una misma abstracción. Estos sistemas se refieren a modelos simplificados de circuitos eléctricos que se hallan en distintos ámbitos de la ingeniería eléctrica, de relevancia notable en múltiples aplicaciones tecnológicas. Su característica fundamental es la posibilidad de tener distintos comportamientos según el valor que tome alguna variable del sistema (tiempo o estado), de manera que estarán integrados por diferentes subsistemas, cada uno de los cuales es un SLD concreto. El hecho de que el sistema se encuentre regido por uno u otro subsistema lo define una señal de conmutación, y, consecuentemente, se tiene que el sistema global es conmutado.

El análisis de ambos casos se extiende a la solución, la estabilidad, la controlabilidad y observabilidad del sistema global, de forma genérica y también para algunos parámetros concretos. El estudio se realiza fundamentalmente mediante criterios del Álgebra Lineal aplicados a SLDC, aunque también se emplean otros criterios pertenecientes a otros ámbitos de las matemáticas, tales como el cálculo diferencial, que complementan y/o ayudan a entender los resultados obtenidos.

Con tal de interpretar cómo actúa la señal de conmutación sobre un sistema, se plantean dos variantes de un sistema similar (un circuito RLC serie). En el primer caso, la señal de conmutación depende exclusivamente del tiempo, mientras que en el segundo, depende del estado.

### 5.1. SLDC con señal de conmutación dependiente del tiempo

Planteamos como caso de estudio un circuito eléctrico formado por dos mallas, con dos interruptores  $S_1$  y  $S_2$ , que, en función de la combinación abierto/cerrado (OFF/ON), funciona uno u otro subcircuito. De este modo, se puede modelizar el sistema global como un sistema conmutado, en que cada uno de los subcircuitos está regido por un subsistema distinto.

El circuito considerado es un circuito RLC, un circuito lineal que contiene una resistencia eléctrica, una bobina (inductancia) y un condensador (capacitancia), tal como se muestra en la Figura 12.

A tal efecto, se recuerdan algunos conceptos previos sobre teoría de circuitos, tomando como referencia [2] y [6].

Un condensador es un dispositivo almacenador de energía en forma de carga eléctrica, de manera que:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Donde  $i_c$  es la intensidad que circula a través de sus armaduras,  $v_c$  es el voltaje que existe entre ellas (actúan como terminales o bornes), y  $C$  es la capacitancia del dispositivo.

Una bobina o inductancia es un dispositivo almacenador de energía en forma de flujo magnético, de manera que:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Donde  $i_L$  es la intensidad que circula a través de la bobina,  $v_L$  es el voltaje que existe entre sus terminales y  $L$  es la inductancia del dispositivo.

En última instancia, se tiene una resistencia eléctrica, un dispositivo disipador de energía, el comportamiento del cual viene dado por:

$$v_R = R i_R$$

En que  $v_R$  es el voltaje entre sus terminales,  $i_R$  es la corriente que circula a través de ella, y  $R$  es el valor de la resistencia.

Sabiendo que  $i = \frac{dq}{dt}$ , donde  $q$  es la carga (en *Coulombs*) e  $i$  la intensidad de corriente eléctrica, si se aplica al circuito la segunda ley de Kirchhoff, el sistema queda modelizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\sum E(t) = v_L + v_R + v_C = L \frac{di_L}{dt} + R i_R + \frac{1}{C} q = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

Donde el término  $\sum E(t)$  representa la suma de las fuentes de tensión del sistema. Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, con lo que su comportamiento está asociado a un sistema de segundo orden (es decir, en el plano  $s$ , el polinomio característico es de orden 2).

A partir de esta última expresión se modeliza el sistema RLC con las dos variables de estado  $Q$  e  $I$ , como carga del circuito e intensidad del circuito, respectivamente. La intensidad circulará por la malla derecha (ver Figura 12) en el subsistema 1, y por la malla exterior en el subsistema 2.



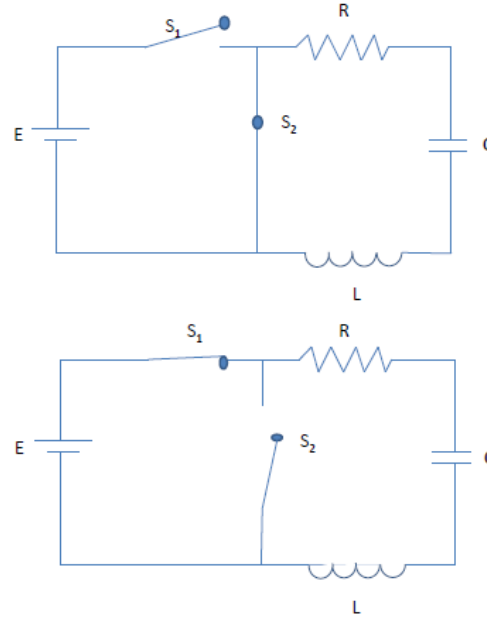


Figura 12. Circuito RLC con señal de conmutación dependiente del tiempo.

El sistema, en términos generales, queda:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = A_{\sigma(t)} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + B_{\sigma(t)} \cdot E \quad (\text{Ec. 94})$$

Se tiene que la señal de conmutación  $\sigma \in (1,2)$ , en que 1 es el índice asociado al subsistema en que el interruptor  $S_1$  está abierto (OFF) y  $S_2$  cerrado (ON), y 2 para el interruptor  $S_2$  abierto y  $S_1$  cerrado.

De este modo se desprenden las siguientes ecuaciones para los subsistemas 1 y 2, respectivamente.

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} E \quad (\text{Ec. 95})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} E \quad (\text{Ec. 96})$$

- **Solución del sistema**

Se toman los subsistemas 1 y 2 de la siguiente manera, definidos en dos intervalos de tiempo:

**Subsistema 1:** Señal  $\sigma_1 \rightarrow (S_1 \text{ OFF}, S_2 \text{ ON}) \forall t \in [t_0, t_1)$

**Subsistema 2 :** Señal  $\sigma_2 \rightarrow (S_1 \text{ ON}, S_2 \text{ OFF}) \forall t \in [t_1, t_2)$

Para el subsistema 1, según la Ec.23, se tiene solamente solución homogénea, al ser el vector  $B_1 = (0,0)^T$  para la entrada  $u_1(t) = E(t)$ .

$$x_{\sigma_1}(t) = \phi_{\sigma_1}(t)x_0 = \phi_{\sigma_1}(t; t_0, x_0, u_1, \sigma_1) = \phi_{\sigma_1}(t; t_0, \sigma_1, x_0)x_0 = e^{A_1 \cdot t} \cdot x_0 \text{ (Ec. 97)}$$

Las condiciones iniciales son  $x_{\sigma_1}(t_0) = x_{\sigma_1}(0) = (Q(0), I(0))^T = (0,0)^T$ , ya que la fuente no proporciona diferencia de potencial al circuito al estar el interruptor  $S_1$  OFF, y además el condensador está inicialmente descargado.

La matriz de transición de estados cuando está activo el primer sistema es  $\phi_{\sigma_1}(t) = e^{SD_1S^{-1} \cdot t} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} \end{pmatrix} S^{-1}$ , siendo  $D_1$  la matriz diagonal equivalente a  $A_1$ , obtenida por cambio de base  $D_1 = S^{-1}A_1S$  (ver [7] para más detalles) siendo  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de la matriz  $A_1$  del subsistema 1, que se calculan de la siguiente forma:

$$Q(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1/CL & -R/L - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda) \cdot (-R/L - \lambda) - (-1/CL) = 0, \text{ (Ec. 98)}$$

Las raíces de dicho polinomio (llamado característico) quedan de la forma:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \text{ (Ec.99)}$$

Para el subsistema 2, se tiene tanto solución homogénea como forzada. En este caso se debe notar que las condiciones iniciales para este subsistema se corresponden con las condiciones finales del estado del subsistema anterior, es decir:

$$x_{\sigma_2}(t_{0,\sigma_2}) = x_{\sigma_1}(t_{1,\sigma_1}) = x_{\sigma_2}(t_1) = (Q, I)^T = (0,0)^T$$

Para simplificar la nomenclatura, se denota a partir de ahora el estado inicial del subsistema 2,  $x(t_1) = x_1 = (Q, I)^T = (0,0)^T$ .

En que el espacio de soluciones queda, según la Ec. 78:

$$x_{\sigma_2}(t) = \phi_{\sigma_2}(t; t_1, x_1, u_2, \sigma_2) + \int_{t_1}^{t_2} \phi(t - \tau) B u_2(\tau) d\tau = \phi_{\sigma_2}(t; t_1, \sigma_2, x_1)x_1 +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(t_2 - \tau) B u_2(\tau) d\tau = e^{A_2 \cdot t} \cdot x_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A_2 \cdot (t_2 - \tau)} B u_2(\tau) d\tau \quad (\text{Ec.100})$$

Se debe notar que las matrices de los dos sistemas son iguales  $A_1 = A_2$ , así; la ecuación anterior queda:

$$x_{\sigma_2}(t) = e^{SD_1 S^{-1} \cdot t} \cdot x_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{SD_1 S^{-1} \cdot (t_2 - \tau)} B |v u_2(\tau) d\tau =$$

$$S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot t} \end{pmatrix} S^{-1} \cdot x_1 + \int_{t_1}^{t_2} S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot (t_2 - \tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot (t_2 - \tau)} \end{pmatrix} S^{-1} B |v u_2(\tau) d\tau \quad (\text{Ec.101})$$

Sabiendo que  $x_1 = (Q, I)^T = (0, 0)^T$ , sólo se tendrá en cuenta el segundo término de la Ec.100.

Se tiene:  $B = (0, -\frac{1}{L})^T$ ,  $u_2(\tau) = E$ . La solución del sistema en el espacio temporal queda:

$$x_{\sigma_2}(t) = \int_{t_1}^{t_2} S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot (t_2 - \tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot (t_2 - \tau)} \end{pmatrix} S^{-1} S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} E d\tau \quad (\text{Ec.102})$$

Siendo la matriz  $S$  :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} & -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.103})$$

Dada lo aparatoso de la expresión de la matriz de cambio de base y del producto de las matrices, se aplicará la transformada de Laplace para encontrar la solución  $x_{\sigma_2}(s)$ . Así, según la solución para SLD (Ec.23):

$$x_{\sigma_2}(s) = \phi_{\sigma_2}(s) x_1 + \phi_{\sigma_2}(s) B u_2(s) = \phi_{\sigma_2}(s) B u_2(s) = (sI - A_2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \frac{E}{s}$$

$$= \frac{1}{s \left( s + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{CL}} \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L} & 1 \\ -\frac{1}{CL} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \frac{E}{s} = \frac{1}{s \left( s + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{CL}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ s \end{pmatrix} \frac{E}{s}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-E/sL}{s \left( s + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{CL}} \\ \frac{-E/L}{s \left( s + \frac{R}{L} \right) + \frac{1}{CL}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-E/sL}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}} \\ \frac{-E/L}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{CL}} \end{pmatrix}$$

(Ec.104)

Siendo la entrada  $u_2(s)$  un escalón de amplitud  $E$ , i.e.  $\frac{E}{s}$ , ya que  $E(t)$  se considera una fuente constante.

- **Análisis de estabilidad del sistema**

Considerando el criterio de estabilidad para la matriz  $A_{\sigma(t)}$ , explicado en el apartado 4.3., según la Ec. 47, y siendo  $\lambda_{1,2}$  (Ec. 99) los valores propios de la matriz  $A_{\sigma(t)}$ :

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}}$$

El sistema será inestable si la parte real de algún valor propio es positiva. En tal caso, es evidente que sólo podrá suceder para  $\lambda_1$  si:

$$\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} > \frac{R}{L} \quad (\text{Ec. 105})$$

Esta expresión no tiene sentido físico, ya que los parámetros característicos del circuito sólo toman valores positivos.

También se puede analizar para el caso de valores propios complejos. En tal caso, se cumpliría la expresión:

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL} < 0 \quad (\text{Ec.106})$$

Que sólo es posible para valores de  $R < 2\sqrt{L/C}$ .

Así, como  $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$ , se tiene que el sistema será asintóticamente estable. Además, cada uno de los subsistemas también lo son, pues comparten la misma matriz  $A$ . Sin embargo, sólo interesará conocer la estabilidad asociada al subsistema 2, que representa el final del SLDC, ya que este parte de un punto de equilibrio asintóticamente estable, el origen.

En efecto, siendo el subsistema 2 un sistema no homogéneo, en función del valor propio dominante de la matriz  $A$ , se pueden diferenciar distintos casos, según sean los valores propios reales o complejos.

➤ **Caso 1: valores  $\lambda_{1,2}$  reales, siendo  $R \geq 2\sqrt{L/C}$**

Es claro que el valor propio dominante del sistema será  $\lambda_2$ , ya que  $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ . Si 1 no es valor propio, se tiene que el punto de equilibrio del sistema (estando en el subsistema 2) viene dado por la Ec. 49:

$$\begin{aligned} x_0 &= (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/CL & R/L + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{R/L + 1 + \frac{1}{CL}} \begin{pmatrix} R/L + 1 & 1 \\ -1/CL & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{R/L + 1 + \frac{1}{CL}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.107}) \end{aligned}$$

válido para  $|\lambda_2| < 1$

Se tendrá un nodo estable (ver Figura 13), con  $v_{1,2}$  siendo los vectores propios de  $\lambda_{1,2}$ . La solución tenderá al equilibrio con trayectorias tangentes a  $v_{1,2}$  y velocidades  $\lambda_{1,2}$ , respectivamente.

Para el caso concreto en que  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $E = 100 \text{ V}$ , se tiene que la matriz  $A$  toma la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -1500 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -500; \quad \lambda_2 = -1000$$

Que son los elementos de la diagonal principal de la matriz diagonal  $D$  asociada al endomorfismo  $A$ . Esta matriz es una matriz Hurwitz. Además existe una base de vectores propios en que  $A$  diagonaliza, esto es la base para la cual la matriz  $A$  se transforma en la matriz diagonal  $D$ . La base de vectores propios es  $(v_1, v_2) = [(1, -500), (1, -1000)]$ . Así, la matriz  $S$  de cambio de base (Ec. 103) se escribe como:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -500 & -1000 \end{pmatrix}$$

Por lo que, aplicando el cambio de base, también al vector  $B$ :

$$B|_e = S \cdot B|_v \rightarrow B|_v = S^{-1} \cdot B|_e$$

$$B|_v = S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -500 & -1000 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la solución vendrá dada por (Ec. 102):

$$x_{\sigma_2}(t) = \int_{t_1}^{t_2} S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot (t_2 - \tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot (t_2 - \tau)} \end{pmatrix} S^{-1} B |_v u_2(\tau) d\tau =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot (t_2 - \tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \cdot (t_2 - \tau)} \end{pmatrix} S^{-1} \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} E d\tau \quad (\text{Ec. 108})$$

Dada la complejidad que presenta la Ec. 108 para resolverse, se optará por usar el espacio  $s$  en lugar de  $t$ . Consecuentemente, usando la transformada de Laplace, gracias a la Ec.104, se resuelve el sistema de manera más sencilla, del cual se calculan las variables de estado  $x(s) = (Q(s), I(s))^T$ :

$$x(s) = \begin{pmatrix} \frac{-5000}{s^3 + 1500 \cdot s^2 + 500000 \cdot s} \\ \frac{-5000}{s^2 + 1500 \cdot s + 500000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5000}{s(s + 500)(s + 1000)} \\ \frac{-5000}{(s + 500)(s + 1000)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-0.01}{s} + \frac{0.02}{s + 500} + \frac{-0.01}{s + 1000} \\ \frac{-10}{s + 500} + \frac{10}{s + 1000} \end{pmatrix}$$

Así, aplicando la antitransformada de Laplace, en el espacio temporal resulta:

$$x(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ I(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 + 0.02e^{-500t} - 0.01e^{-1000t} \\ -10e^{-500t} + 10e^{-1000t} \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 109})$$

Es decir, se tiene una respuesta sobreamortiguada, en que  $I$  tiende a cero al aumentar  $t$ . En forma genérica, la solución viene dada por ([14]):

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + x_p(t) \quad (\text{Ec. 110})$$

Con  $x_p(t) = (-0.01, 0)^T$  la solución particular;  $v_1, v_2$  los vectores propios correspondientes a los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  respectivamente, se puede comprobar que la trayectoria de las soluciones viene dada por la siguiente combinación lineal de vectores (de la Ec. 110):

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -500 \end{pmatrix} e^{-500t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1000 \end{pmatrix} e^{-1000t} + x_p(t)$$

Siendo  $t$  el intervalo de tiempo desde el final del primer estado hasta el final del segundo, y, considerando que han transcurrido 5 horas ( $t = 18000$  segundos):

$$x(t) = \begin{pmatrix} Q(18000) \\ I(18000) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo claro que, al final del primer estado,  $x_{\sigma_1}(t) = (0, 0)^T$

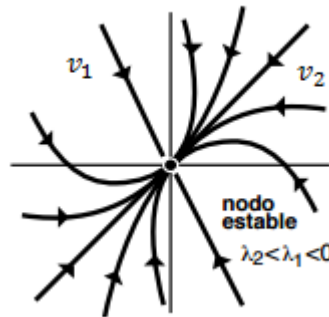


Figura 13. Representación gráfica de un nodo estable. Fuente: [14]

➤ **Caso 2: valores  $\lambda_{1,2}$  reales, siendo  $R = 2\sqrt{L/C}$**

En caso de que los valores propios coincidan, es decir  $\left(\frac{R}{L}\right)^2 = \frac{4}{CL}$ , se tendrá un equilibrio como el de la Figura 14, correspondiente a un nodo impropio estable..

Para el caso concreto en que  $R = 28.284 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $E = 100 \text{ V}$ , se tiene que la matriz  $A$  toma la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -1414.2 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -707.107; \quad \lambda_2 = -707.107$$

Por lo que, en el subsistema 2, el estado se representa, según la Ec. 104:

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} &= \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{pmatrix} \frac{-5000}{s^3 + 1414.2 \cdot s^2 + 500000 \cdot s} \\ \frac{-5000}{s^2 + 1414.2 \cdot s + 500000} \end{pmatrix} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left( \begin{pmatrix} \frac{-5000}{s(s + 707.107)^2} \\ \frac{-5000}{(s + 707.107)^2} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-5000}{500000} [1 - (1 + 707.107t) \cdot e^{-707.107t}] \\ -5000 \cdot t \cdot e^{-707.107t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.01 [1 - (1 + 707.107t) \cdot e^{-707.107t}] \\ -5000 \cdot t \cdot e^{-707.107t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En este caso, se trata de un espacio de soluciones tal que [14]:

$$x(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 (v t e^{\lambda t} + p e^{\lambda t}) + x_p(t) \quad (\text{Ec. 111})$$

Siendo  $v = (707.107, 0)^T$  el único vector propio linealmente independiente del sistema, y  $p$  un vector tal que:

$$(A - \lambda I)p = v$$

Se trata de una respuesta críticamente amortiguada, en que se alcanza el máximo de  $I$  en  $t = 1/\lambda = \frac{1}{707.107} = 1,414 \cdot 10^{-3}$  s, con un valor de  $-2,601 A$  (equivalentemente máximo o mínimo, ya que se considera el valor absoluto), para posteriormente converger a 0.

Pasado un tiempo de 5h, el espacio de estados resulta:

$$\begin{pmatrix} Q(18000) \\ I(18000) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

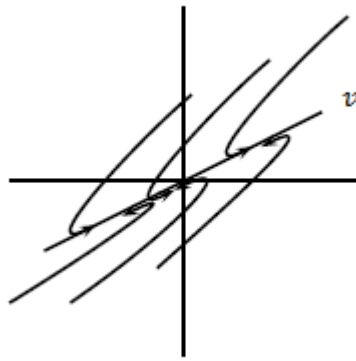


Figura 14. Representación gráfica de un nodo impropio estable. Fuente: [14]

➤ **Caso 3: valores  $\lambda_{1,2}$  complejos, siendo  $R < 2\sqrt{L/C}$**

Para el caso en que  $|\lambda_2| = 1$ , el punto de equilibrio vendrá dado por (Ec. 50):

$$x_0 = (I - A)^{-1}B + e^{ti\omega} \alpha_2 v_2 = \frac{1}{R/L + 1 + \frac{1}{CL}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} + e^{ti\omega} \alpha_2 v_2 \quad (\text{Ec.112})$$

siendo  $v_2$  el vector propio del valor propio  $\lambda_2$ . Se tendrá un equilibrio como el de la Figura 15, correspondiente a un foco estable.



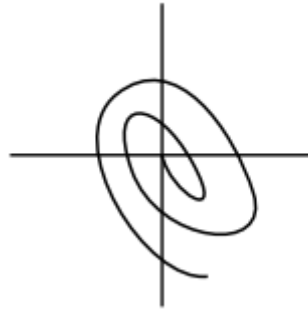


Figura 15. Representación gráfica de un foco estable. Fuente: [14]

Para el caso concreto en que  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $E = 100 \text{ V}$ , se tiene que la matriz  $A$  toma la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -500 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -25 + j706.665; \quad \lambda_2 = -25 - j706.665$$

Por lo que, en el subsistema 2, el estado se representa, según la Ec. 104:

$$x(s) = \begin{pmatrix} \frac{-5000}{s^3 + 50 \cdot s^2 + 500000 \cdot s} \\ \frac{-5000}{s^2 + 50 \cdot s + 500000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5000}{s(s - (-25 + j706.665))(s - (-25 - j706.665))} \\ \frac{-5000}{(s - (-25 + j706.665))(s - (-25 - j706.665))} \end{pmatrix}$$

Y en el espacio temporal, el espacio de estados resulta:

$$\begin{aligned} x(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ I(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.01 \cdot \left\{ 1 - e^{-25t} \left[ \cos(706.665t) + \frac{25}{706.665} \sin(706.665t) \right] \right\} \\ -5000 \cdot \left[ \frac{1}{706.665} e^{-25t} \cdot \sin(706.665t) \right] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.01 \cdot \{ 1 - e^{-25t} [\cos(706.665t) + 0.0354 \sin(706.665t)] \} \\ -7.0754 \cdot e^{-25t} \cdot \sin(706.665t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución es de la forma [14]:

$$x = x(t) = c_1 e^{at} (B_1 \cos(bt) - B_2 \sin(bt)) + c_2 e^{at} (B_2 \cos(bt) + B_1 \sin(bt)) + x_p(t)$$

(Ec.113)

En que  $v_1 = B_1 + jB_2$  es un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = a + jb$

Se trata de una respuesta subamortiguada, es decir, que oscila según la frecuencia  $b$  (correspondiente a la parte imaginaria de los valores propios), y que viene amortiguada según la exponencial  $e^{-at}$  (correspondiente a la parte real).

Pasado un tiempo de 5h, la solución queda:

$$\begin{pmatrix} Q(18000) \\ I(18000) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, en régimen estacionario, para los tres casos derivados de variar los parámetros RLC, el sistema tiende a la misma solución. En particular, el sistema tiene un punto de equilibrio  $x_o = (-0.01, 0)^T$ , por lo que se cumple la condición dada por (capítulo 4.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_o\| \rightarrow 0$$

Es decir,  $x_o$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Gracias a la particularización para cada uno de estos tres casos, se comprueba que el sistema global es estable.

Resumiendo el comportamiento de este sistema: el sistema empieza en un punto estable (el origen) en el subsistema 1 (desde las condiciones iniciales hasta el final de este subsistema, el tiempo  $t_1$ ), en  $t_1$  conmuta gracias a  $\sigma_2$  y es regido por el subsistema 2, al final del cual el sistema tiende al punto  $(-0.01, 0)^T$ , también estable.

### Criterio de Lyapunov

Para demostrar el resultado obtenido, es decir, probar la estabilidad del sistema, se va a usar el criterio de Lyapunov, expuesto en el capítulo 5.3 (siendo válido para los SLD de forma general y para los SLDC en particular).

Considerando el SLD:

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix}$$

Se deberá buscar una forma cuadrática de Lyapunov

$$V(x) = x^t P x \quad (\text{Ec. 54})$$

tal que se cumpla (Ec. 53) para  $P > 0$  (siendo  $P$  cuadrática y definida positiva) y  $Q > 0$ :

$$A^t P + P A = -Q$$

Teniendo en cuenta Ec. 53, la función de Lyapunov para este caso será única puesto que los subsistemas comparten la misma matriz  $A$ .

La matriz  $P$  será la incógnita que se debe determinar, mientras que la matriz  $Q$  se tomará como:

$$Q = Id_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

Siendo  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} > 0$ , se resuelve el sistema (Ec 53):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{CL} \\ 1 & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 114})$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{CL}p_{12} & -\frac{1}{CL}p_{22} \\ p_{11} - \frac{R}{L}p_{12} & p_{12} - \frac{R}{L}p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{CL}p_{12} & p_{11} - \frac{R}{L}p_{12} \\ -\frac{1}{CL}p_{22} & p_{12} - \frac{R}{L}p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resulta un sistema compatible determinado, con 3 ecuaciones y 3 incógnitas, que se resuelve de manera sencilla:

- 1)  $-\frac{2}{CL}p_{12} = -1$
- 2)  $p_{11} - \frac{R}{L}p_{12} - \frac{1}{CL}p_{22} = 0$
- 3)  $2\left(p_{12} - \frac{R}{L}p_{22}\right) = -1$

Siendo  $p_{11} = \frac{1}{2}\left(RC + \frac{1+CL}{RC}\right)$ ;  $p_{12} = \frac{CL}{2}$ ;  $p_{22} = \frac{(1+CL)L}{2R}$

La matriz  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(RC + \frac{1+CL}{RC}\right) & \frac{CL}{2} \\ \frac{CL}{2} & \frac{(1+CL)L}{2R} \end{pmatrix}$  será positiva para cualquier combinación de los parámetros del circuito.

Así, la función cuadrática de Lyapunov del sistema es:

$$V(x) = \begin{pmatrix} Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(RC + \frac{1+CL}{RC}\right) & \frac{CL}{2} \\ \frac{CL}{2} & \frac{(1+CL)L}{2R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 115})$$

Que cumple las condiciones descritas para el Teorema 2 en el apartado 3.3.3 e indica que bajo esta trayectoria el sistema tiende asintóticamente al equilibrio. El sistema homogéneo asociado tiene como equilibrio el punto  $x_0 = (0,0)^T$ , por lo que también se puede extender al subsistema 2 para la solución particular.

### ❖ Conclusión sobre la estabilidad

Se ha comprobado, mediante el criterio algebraico y el método de Lyapunov, que los dos subsistemas son estables de manera independiente, siendo tratados como SLD, gracias al correspondiente análisis de la matriz  $A$ . Al tratarse de un SLDC, se debe asegurar la estabilidad global del sistema, y no sólo la de los dos SLD por separado. A tal efecto, se tiene que el comportamiento de la señal de conmutación garantiza la estabilidad global para cualquier intervalo definido de conmutación, gracias a las condiciones iniciales especificadas, puesto que el sistema siempre tiende a un punto asintóticamente estable. Para el sistema homogéneo (subsistema 1), el punto de equilibrio asintóticamente estable es el origen, mientras que para el sistema no homogéneo (subsistema 2) el punto de equilibrio es la solución particular forzada por la entrada constante, la fuente del circuito. Así, como el origen es solución del sistema homogéneo para el subsistema 2 (y el sistema es estable), para cualquier intervalo de conmutación el sistema global también lo será. Es decir, al conmutar el sistema del estado 1 al estado 2, la respuesta no presenta discontinuidades en el tiempo  $t_1$  de transición entre los dos estados (o instante de conmutación).

### • Controlabilidad del sistema

Se determina la matriz de controlabilidad del sistema  $\mathcal{C}_\sigma$  (Ec. 61):

$$\mathcal{C}_\sigma = (B_1, B_2, A_1 B_1, A_2 B_1, A_1 B_2, A_2 B_2) = (B_1, B_2, A_1 B_1, A_1 B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{R}{L^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{R}{L^2} \end{pmatrix}$$

Que es de rango  $n = 2$  para cualquier combinación de los parámetros del sistema, ya que:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{R}{L^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{L^2} \neq 0, \forall L$$

Así, bajo el criterio de controlabilidad, se tiene que el sistema es controlable (y alcanzable, de forma equivalente).

Se calcula el conjunto múltiple controlable del par  $(A, B)$ , bajo la definición detallada en la Ec. 88. Se tiene:

$$\mathcal{V} = \sum A_{i_{n-1}}^{j_{n-1}} \dots A_{i_1}^{j_1} B_i = [B_1, B_2, A_1 B_1, A_2 B_1, A_1 B_2, A_2 B_2, A_1^2 B_1, A_1 A_2 B_1, A_2 A_1 B_1, A_2^2 B_1, \dots]$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} \\ \frac{1}{L^2} \end{pmatrix}, \dots \right] = [B_2, AB_2, A^2 B, \dots]$$

Siendo el vector imagen  $B$ , de la Ec. 87:

$$\sum \text{Im } B_i = [\text{Im } B_1, \text{Im } B_2] = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \right]$$

Así,  $\mathcal{V}$  cumple la Ec. 89, ya que su rango es 2, por lo que se reafirma que el sistema es completamente controlable. Además, se cumple la Ec. 90, la matriz de controlabilidad es igual al conjunto múltiple controlable.

### Transformación a FCC

En este apartado se pretende demostrar que el sistema se encuentra en su forma controlable mediante la transformación a FCC. En concreto, este procedimiento sería útil si no se cumpliera la condición de controlabilidad (Ec 61), que en este caso sí que se cumple.

Se quiere determinar la FCC de este sistema concreto. Las matrices  $W$  y  $T$  toman la forma:

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = C_\sigma W = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{R}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Con  $T$  invertible puesto que su determinante es diferente de 0. Además,  $T$  es una matriz simétrica un endomorfismo escalar), cuyas propiedades son (ver [7]):

$$T = T^t$$

$$TT^t = T^t T = K Id_n$$

Así, según la Ec. 62, reescriben las matrices  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ , que determinan el conjunto de espacios controlables siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{A} = T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} = A\end{aligned}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{L} [1 \quad 0]$$

El nuevo espacio de estados es:

$$\bar{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = -L \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix}$$

Como era de esperar la matriz  $\bar{A}$  es de orden dos ya que el sistema es controlable: el término  $A_{11}$  es de tamaño 2x2 (Ec. 64).

Si en lugar del vector  $B$  del subsistema 2, se tuviera un vector (ver Ec. 103):

$$B = v_1 = \left( 1, -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \right)^T,$$

es decir, igual a uno de los dos vectores propios de la matriz  $A$ , se tendría un sistema no controlable, ya que la matriz de controlabilidad  $C$  quedaría, según la Ec. 61:

$$C = (v_1 \quad Av_1 \quad A^2v_1 \dots) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \\ -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} & -\frac{1}{CL} + \frac{R^2}{2L^2} - \frac{R}{2L} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es igual a 0, es decir  $C$  es de rango 1 (un vector de dimensión 2 igual al vector propio). Esto es debido (ver [7] para más detalles) a la definición de un vector propio  $v$  por un endomorfismo  $f$  :

$$f(v) = \lambda v$$

En que  $\lambda$  es el valor propio asociado a  $v$  ( $v \neq 0$ ).

Al ser  $A$  el endomorfismo asociado a  $v_1$ , cualquier potencia  $k$  de dicha matriz por  $v_1$  queda:

$$A^k v_1 = \lambda^k v_1$$

Por lo que las columnas de la matriz  $C$  resultan una combinación lineal del vector  $v_1$ , y el rango de  $C$  es inferior a  $n = 2$ .

En este caso concreto (válido también para  $B = v_2$ ), el término  $A_{11}$  de la matriz  $\bar{A}$  es de tamaño 1x1 (ver Ec. 64), ya que el subespacio de controlabilidad es de dimensión 1. El sistema no es completamente controlable, por lo que la transformación a FCC sería una herramienta útil para que el sistema sí lo sea.

Si en lugar de considerar el subsistema 2, se optara por considerar el 1, en que  $B = 0$ , la matriz  $C$  resulta una matriz nula, por lo que el subespacio de controlabilidad es 0 y el término  $A_{22}$  de la matriz  $\bar{A}$  sería de tamaño 2x2 (ver Ec. 64). En este caso, la transformación a FCC no sería útil puesto que el sistema nunca llegará a ser controlable al no disponer de entrada  $u$ .

De los resultados obtenidos para el caso de estudio, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

$$\bar{A} = A, \quad B = \alpha \bar{B}, \quad \bar{C} = \alpha C, \quad x = \alpha \bar{x} \rightarrow \bar{A} = A; \quad \bar{B} = \frac{1}{\alpha} B; \quad \bar{C} = \alpha C; \quad \bar{x} = \frac{1}{\alpha} x$$

Con  $\alpha = -\frac{1}{L}$  un parámetro real. El nuevo vector de estados es una combinación lineal del original. Así, la transformación a FCC sólo requiere una combinación lineal de los vectores  $B$  y  $C$ : esto es debido a que el par  $(A, B)$  cumple con la condición de controlabilidad (rango de la matriz de controlabilidad  $C$  es máximo), con lo que el sistema se encuentra en forma controlable. La modelización del sistema es tal que el sistema es completamente controlable (Ec. 65):

$$-L \frac{d\bar{Q}}{dt} = -L\bar{I}$$

$$-L \frac{d\bar{I}}{dt} = \frac{-1}{CL} (-L)\bar{Q} + \frac{-R}{L} (-L)\bar{I} + E \quad (\text{Ec. 116})$$

Si se divide la Ec 116 por el factor  $(-L)$ , el sistema es equivalente al original (Ec. 96).

Se debe notar que la elección de  $C$  para la variable de salida  $Q(t)$  no influye en la discusión del resultado, pues con  $I(t)$  el resultado hubiera sido análogo.

### Cómo controlar el sistema hacia un estado arbitrario

Para controlar el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  y llevarlo a un estado  $x_f$  hacemos una realimentación  $u = Fx$  al sistema de manera que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = (A + BF)x$$

Tenga una solución. Es decir, se busca la solución de este sistema forzando a obtener una  $x$  deseada con un nuevo vector  $F$  incógnita, que en este caso es una matriz de una fila y dos columnas:

$$F = (F_1 \quad F_2)$$

Resultando dos incógnitas,  $F_1$  y  $F_2$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene  $F$  por el cual somos capaces de trasladar el espacio de estados  $x$  a uno deseado  $x_f$  en el tiempo  $t_f$  de alcance deseado.

Frecuentemente, sólo interesa que los valores propios de la matriz tengan la parte real negativa pues así se sabe que a largo plazo converge a cero. Es decir, para que el sistema se pueda controlar este tiene que ser estable. Para esto sólo hay que calcular el polinomio característico de esta matriz y obligar a que sus valores propios sean de la forma deseada.

Para calcular la solución en el espacio temporal, con la transformación de  $u$  se tiene (para condiciones iniciales nulas):

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t \phi'(t-\tau) B u'(\tau) d\tau = \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} d\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} -e^{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + e^{\frac{1}{\lambda_1}} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -e^{\lambda_2} \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} + e^{\frac{1}{\lambda_2}} e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con  $\lambda_1, \lambda_2$  los nuevos valores propios de la matriz  $R = A + BF$ :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} - \frac{1}{L} F_1 & -\frac{R}{L} - \frac{1}{L} F_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{1}{L} F_2 \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{R}{L} + \frac{1}{L} F_2 \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{CL} + \frac{1}{L} F_1 \right)}$$



Para asegurar la estabilidad de la matriz  $R$ , según el criterio algebraico, los nuevos  $\lambda_{1,2}$  tendrán parte real negativa si:

$$F_2 > -R$$

Es decir, el vector  $F$  tendrá una componente  $F_1$  libre y otra,  $F_2$ , restringida a la anterior condición. La condición de estabilidad de la matriz  $R$  es indispensable para ejercer el control sobre el sistema puesto que si a lo largo del tiempo, la respuesta tiende a infinito, el control es imposible.

### ❖ Conclusión sobre controlabilidad

Se ha comprobado que el sistema es completamente controlable gracias al criterio de la Ec. 61. Además, gracias a la transformación a FCC se reafirma que  $(A, B, C)$  ya se encuentran en la forma controlable. También se han propuesto alternativas al sistema para ver cómo varía la controlabilidad. En el primer caso, el subespacio controlable se reduce a dimensión  $n = 1$ , con la elección del vector  $B$  como uno de los vectores propios de la matriz  $A$ . En el segundo caso, el subespacio controlable es nulo ya que no se tiene entrada ( $B = 0$ ).

### • Observabilidad del sistema

Por otro lado, para saber si el sistema es observable (y reconstructible), se construye la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_\sigma$ . A tal efecto, es necesario definir una matriz  $C_{\sigma(t)}$  asociada a la salida del sistema, tal que:

$$y(t) = C_{\sigma(t)}x(t)$$

Se eligen dos casos,  $C_{\sigma(t)} = (1,0)^T$ ;  $C_{\sigma(t)} = (0,1)^T$ , independientes de la señal de conmutación, puesto que, por un lado, carece de importancia práctica la complicación de dicha matriz y, por otro, la simplificación ayuda a entender mejor el problema.

Así, para el caso en que  $C_{\sigma(t)} = (1,0)^T = C_\sigma$ , se tiene:

$$\mathcal{O}_\sigma = (C_1^T, C_2^T, A_1^T C_1^T, A_1^T C_2^T, A_2^T C_1^T, A_2^T C_2^T)^T = (C^T, A^T C^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y para el caso en que  $C_{\sigma(t)} = (0,1)^T$ , se tiene, de forma equivalente:

$$\mathcal{O}_\sigma = (C_1^T, C_2^T, A_1^T C_1^T, A_1^T C_2^T, A_2^T C_1^T, A_2^T C_2^T)^T = (C^T, A^T C^T)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

A la vista de los resultados obtenidos, es claro que el sistema será siempre completamente observable, ya que el determinante de las dos matrices anteriores es siempre distinto de 0. Se puede notar, por ejemplo, lo práctico que resulta, en el segundo caso, tomando como variable de salida la intensidad en el circuito, con un amperímetro por ejemplo, ya que con ello se puede

conocer el estado del sistema completo, es decir, se puede conocer la carga  $Q(t)$  del condensador a través de la medida de la intensidad  $I(t)$ .

### Transformación a FCO

En este apartado se pretende demostrar que el sistema se encuentra en su forma observable y se quiere presentar una manera de llegar a ella: la transformación a FCO, particularmente útil cuando no se cumple el criterio de completa observabilidad de un sistema.

Así, para el caso concreto del sistema RLC. Se tiene, para el vector  $C = (0,1)$ :

$$Q = \left( \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando las transformaciones a las matrices  $A, B, C$ , y al vector  $x$  resulta (Ec. 69):

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CQ = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]$$

$$\bar{x} = Q^{-1}x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL}Q \\ I \end{bmatrix}$$

Como la matriz  $\bar{A}$  es de tamaño 2x2, el sistema es completamente observable, con el subespacio observable  $A_{11}$  de rango máximo (ver Ec. 68).

Los resultados obtenidos eligiendo algún vector propio de  $A$  para  $C$ , son análogos a lo expuesto anteriormente a la controlabilidad. Es decir, la matriz de observabilidad  $O$  resultaría de dimensión 1, por lo que el término  $A_{11}$  de la matriz  $\bar{A}$  (Ec. 68) también, siendo el subespacio observable de dimensión 1.

Asimismo, de forma análoga a la controlabilidad, eligiendo  $C = 0$ , el término  $A_{22}$  de la matriz  $\bar{A}$  (Ec. 68) sería de tamaño 2x2, con lo que el sistema no sería observable.

Otra posibilidad es considerar la matriz  $C_{\sigma(t)} = (1,0)^T = C_{\sigma}$ , en que se tiene una matriz de observabilidad distinta e igual a la Identidad. Luego, la matriz de transformación  $Q$  resulta:

$$Q = \left( \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix}.$$

Las matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , resultan (Ec. 69):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix} = [0 \quad 1]$$

El nuevo espacio de estados resulta:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R/L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R/L Q + I \\ Q \end{bmatrix}$$

#### ❖ Conclusión sobre observabilidad

Con el estudio de ambos casos para el vector  $C$ , se observan los siguientes resultados:

- i)  $\bar{A} = A^T$ , por lo que el sistema tiene rango máximo y es completamente observable.
- ii) El sistema es observable independientemente de la elección del vector  $C$ .
- iii) Los resultados obtenidos para  $\Sigma(\bar{C}_i, \bar{A}_i)$  son equivalentes en ambos casos. Así, teniendo en cuenta la matriz de observabilidad de ambos sistemas en FCO:

$$O = (\bar{C}_i^t, \bar{A}_i^t \bar{C}_i^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

Ambos sistemas son completamente observables ya que la matriz es de rango máximo.

#### ❖ Dualidad entre controlabilidad y observabilidad

De esta manera se prueba el principio de dualidad, según el cual el sistema  $\Sigma(\bar{C}_i, \bar{A}_i)$  es completamente observable (Ec. 66) si y sólo si su sistema dual  $\Sigma(\bar{A}_i^t, \bar{C}_i^t) = \Sigma(A_i, C_i)$  es completamente controlable (Ec. 61), condición verificada en el apartado anterior.

## 5.2. SLDC con señal de conmutación dependiente del estado

Se modifica el circuito anterior, de manera que en la rama exterior se añade una resistencia  $R'$ . Así, el estado 1' del nuevo circuito es equivalente al del caso anterior; mientras que, ahora, el estado 2' ha variado, ya que la nueva resistencia se opondrá al paso de corriente (ver Figura 16). Se dispone de una señal de conmutación en forma de dos interruptores  $S_1$  y  $S_2$  (como en el caso anterior), pero en este caso se hallan dos diferencias respecto a él. En primer lugar, la dependencia con una variable de estado, que es la carga eléctrica  $Q$ : es decir,  $\sigma$  conmutará entre los dos subsistemas según el valor que adquiera la carga eléctrica  $Q$ , i.e.  $\sigma = f(x(t))$ . Y, en segundo lugar, el comportamiento cíclico de  $\sigma$ , es decir, no dejará de actuar cuando el estado del sistema recaiga en el subsistema 2', sino que irá conmutando entre 1' y 2' ininterrumpidamente, hasta que una señal externa interrumpa su actividad.

En tal caso, se tienen dos subsistemas 1' y 2', representados de esta forma:

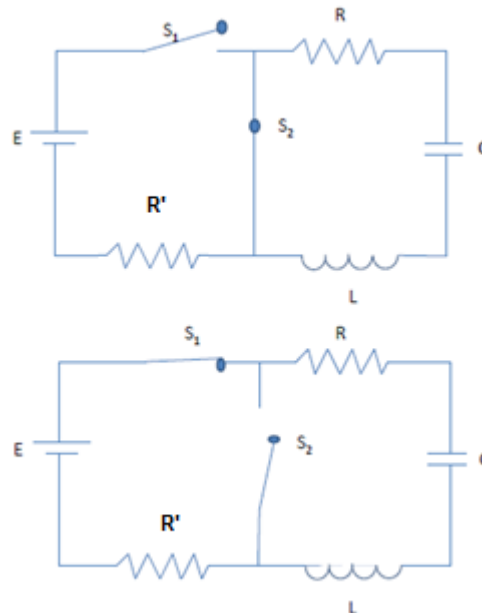


Figura 16. Circuito RLC con señal de conmutación dependiente del estado.

**Subsistema 1':** Señal  $\sigma_1'(x(t)) \rightarrow (S_1 \text{ OFF}, S_2 \text{ ON}) \forall x(t) = (10^{-3}, I(t))^T$

**Subsistema 2' :** Señal  $\sigma_2'(x(t)) \rightarrow (S_1 \text{ ON}, S_2 \text{ OFF}) \forall x(t) \neq (10^{-3}, I(t))^T$

Así, se espera que el sistema conmute de un estado a otro según el valor que tenga la carga del condensador en cada instante. El circuito expuesto es una “simplificación” de una aplicación práctica parecida a la batería de algún dispositivo, en que la inductancia genera una fuerza electromotriz (fem) tal que se opone al aumento de corriente del sistema, actuando de esta

manera como almacenador de energía.

Para facilitar la resolución analítica, se toman parámetros fijados,  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $E = 100 \text{ V}$ ,  $R' = 10 \Omega$

En el estado 1', el subsistema resulta:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -1500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} E \quad (\text{Ec. 117})$$

Y en el estado 2', el subsistema queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \end{pmatrix} E \quad (\text{Ec. 118})$$

### • Análisis de estabilidad

Así, el análisis de estabilidad para el subsistema 1' es el mismo que para el primer caso expuesto en el circuito RLC anterior. No obstante, para saber si el sistema es estable, también bastará saber cómo evoluciona el subsistema 2'. A tal fin, se calculan los valores propios de la matriz  $A_{2'}$ :

$$Q(\lambda) = \det(A_{2'} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{R+R'}{L} \lambda + \frac{1}{CL} \quad (\text{Ec. 119})$$

Que resultan, en forma genérica:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R+R'}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R+R'}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}} \quad (\text{Ec.120})$$

Que serán siempre de parte real negativa (por lo que el subsistema 2' será estable). De manera análoga al primer caso, se tendrán los valores propios siguientes, en función del valor de los parámetros del circuito:

- $\lambda_{1,2}$  Reales, distintos (y negativos):  $R + R' > 2\sqrt{L/C}$
- $\lambda_{1,2}$  Reales, iguales (y negativos):  $R + R' = 2\sqrt{L/C}$
- $\lambda_{1,2}$  Complejos conjugados (parte real negativa):  $R + R' < 2\sqrt{L/C}$

Así, se tiene que ambos subsistemas (1' y 2') serán estables bajo las mismas condiciones. Sin embargo, según sean los parámetros  $R$  y  $R'$ , la respuesta trazará una trayectoria u otra.

Imponiendo los parámetros fijos, se tiene que la matriz  $A_2$ , toma la forma:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -2000 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -292.893; \quad \lambda_2 = -1707.107$$

Es decir, tienen parte real negativa, por lo que la respuesta tiende asintóticamente al equilibrio (según lo expuesto en el capítulo 4.3). Además, los valores propios de la matriz  $A_1$ , bajo estos parámetros, son también reales, distintos (y negativos).

### Criterio de Lyapunov

Según el criterio de Lyapunov, el subsistema 2' será estable en caso que exista una función de Lyapunov  $V(x)$  tal que (de forma análoga al caso anterior), se tiene, en forma genérica:

$$A^t P + P A = -Q \quad \text{con } A = A_2, \quad Q = Id_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{CL} \\ 1 & \frac{-R+R'}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{CL} & \frac{-R+R'}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones resulta:

- 1)  $-\frac{2}{CL} p_{12} = -1$
- 2)  $p_{11} - \frac{R+R'}{L} p_{12} - \frac{1}{CL} p_{22} = 0$
- 3)  $2 \left( p_{12} - \frac{R+R'}{L} p_{22} \right) = -1$

$$\text{Siendo } p_{11} = \frac{1}{2} \left( (R+R')C + \frac{1+CL}{(R+R')C} \right); \quad p_{12} = \frac{CL}{2}; \quad p_{22} = \frac{(1+CL)L}{2(R+R')}$$

La matriz  $P$  se construye de tal forma que la función  $V(x)$  cumple con las condiciones planteadas según Ec. 53:

$$V(x) = (Q \quad I) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( (R+R')C + \frac{1+CL}{(R+R')C} \right) & \frac{CL}{2} \\ \frac{CL}{2} & \frac{(1+CL)L}{2(R+R')} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 121})$$

La discusión para estos resultados es la misma que la expuesta en el primer caso (ver Ec. 115), puesto que sólo se modifica un parámetro, en concreto,  $R$ , que no tiene mayor influencia, al ser un valor positivo y hallarse sumando en las casillas de la matriz  $P$ .

- **Estudio de la evolución del sistema**

Bajo el mismo criterio que para el primer caso, se expone de forma genérica la solución del sistema, (teniendo en cuenta que los valores propios de las matrices son reales, distintos y negativos para los parámetros fijados, ver Ec. 110):

$$x(t) = c_{i1}v_{i1}e^{\lambda_{i1}t} + c_{i2}v_{i2}e^{\lambda_{i2}t} + x_{ip}(t), i \in \{1', 2'\} \quad (\text{Ec. 122})$$

La solución tiende a un punto de equilibrio con velocidades determinadas por los valores propios  $\lambda_i$  y trayectorias tangentes a los vectores propios  $v_i$  de la matriz  $i$  correspondiente al modo activo en que se encuentre el sistema global.

En este caso, se parte de unas condiciones iniciales distintas al caso anterior. En concreto, se considerará que el condensador está inicialmente (parcialmente) cargado:

$$x(t=0) = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema global será “dirigido” por la señal  $\sigma_{2'}$ , de modo que se empieza en el estado 2', siendo gobernado por las ecuaciones del subsistema 2':

$$\dot{x}_{\sigma_{2'}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \end{pmatrix} E$$

$$x_{\sigma_{2'}}(t=0) = \begin{pmatrix} Q(0) \\ I(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar la notación, se reescribe  $x_0 = x_{\sigma_{2'}}(t=0)$ . Con una entrada de tipo escalón de amplitud  $E = 100 \text{ V}$ , se resuelve el sistema, según (Ec. 23 y Ec. 78):

$$\begin{aligned} x_{\sigma_{2'}}(s) &= \phi_{\sigma_{2'}}(s)x_0 + \phi_{\sigma_{2'}}(s)Bu_2(s) = (sI - A_{2'})^{-1} \begin{pmatrix} Q(0) \\ I(0) \end{pmatrix} + (sI - A_{2'})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \frac{E}{s} = \\ &= (sI - A_{2'})^{-1} \left[ \begin{pmatrix} Q(0) \\ I(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \frac{E}{s} \right] \\ &= \frac{1}{s(s+2000) + 500000} \begin{pmatrix} s+2000 & 1 \\ -500000 & s \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -50 \end{pmatrix} \frac{100}{s} \right] \\ &= x_{\sigma_{2'}}(s)_h + x_{\sigma_{2'}}(s)_p \end{aligned}$$

En que  $x_{\sigma_{2'}}(s)_h$  y  $x_{\sigma_{2'}}(s)_p$  son las soluciones homogénea y particular, respectivamente. Interesa tratarlas por separado, de tal manera que:

$$x_{\sigma_2'}(s)_h = \frac{1}{(s + 292.893)(s + 1707.107)} \left( \frac{5 \cdot 10^{-4}(s + 2000)}{-250} \right)$$

$$= \left( \frac{5 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{1.2071}{s + 292.893} + \frac{-0.2071}{s + 1707.107} \right]}{\frac{-250}{(s + 292.893)(s + 1707.107)}} \right);$$

$$x_{\sigma_2'}(s)_p = \frac{1}{(s + 292.893)(s + 1707.107)} \left( \frac{-5000/s}{-5000} \right) = \left( \frac{\frac{-5000}{s(s + 292.893)(s + 1707.107)}}{\frac{-5000}{(s + 292.893)(s + 1707.107)}} \right)$$

$$= \left( \frac{\frac{-0.01}{s} + \frac{-0.01207}{s + 292.893} + \frac{0.002071}{s + 1707.107}}{\frac{-5000}{(s + 292.893)(s + 1707.107)}} \right);$$

Aplicando la antitransformada de Laplace, resulta:

$$x_{\sigma_2'}(t)_h = \left( \frac{5 \cdot 10^{-4} (1.2071 \cdot e^{-292.893t} - 0.2071 \cdot e^{-1707.107t})}{-0.17678(e^{-292.893t} - e^{-1707.107t})} \right)$$

$$x_{\sigma_2'}(t)_p = \left( \frac{-0.01 - 0.01207 \cdot e^{-292.893t} + 0.002071 \cdot e^{-1707.107t}}{-3.5355(e^{-292.893t} - e^{-1707.107t})} \right)$$

$$x_{\sigma_2'}(t) = x_{\sigma_2'}(t)_h + x_{\sigma_2'}(t)_p = \left( \frac{-0.01 - 0.0115 \cdot e^{-292.893t} + 0.00197 \cdot e^{-1707.107t}}{-3.71228(e^{-292.893t} - e^{-1707.107t})} \right)$$

La solución global pone de manifiesto que el resultado depende en mayor magnitud de la solución particular, es decir, de la entrada que se le aplica, que de su condición inicial.

El sistema evolucionará con esta trayectoria fijada hasta que el *Switch* pase a seleccionar el otro subsistema (o una señal externa lo detenga). Si  $x_{\sigma_2'}(t) = (10^{-3}, I(t))^T$ ; el sistema conmuta y será gobernado por la señal  $\sigma_1$ .

Se debe, por tanto, determinar el instante de tiempo en que el estado cumpla tal condición:

$$x_{\sigma_2'}(t) = \left( \frac{-0.01 - 0.0115 \cdot e^{-292.893t} + 0.00197 \cdot e^{-1707.107t}}{-3.71228(e^{-292.893t} - e^{-1707.107t})} \right) = \begin{pmatrix} 10^{-3} \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$Q(t) = -0.01 - 0.0115 \cdot e^{-292.893t} + 0.00197 \cdot e^{-1707.107t} = 10^{-3}$$

Que no tiene solución, puesto que  $Q(t)$  será siempre negativa para el dominio del tiempo  $t \geq 0$ .



### ▪ Replanteamiento del problema

Se deberá imponer, por tanto, un estado que sea factible desde el punto de vista matemático para que el sistema de esta única ecuación sea compatible. La problemática surge a raíz de considerar la carga del condensador negativa, según la forma matricial empleada en la modelización del sistema RLC, en lugar de considerar la carga positiva (en electrodinámica, la carga se considera en valor absoluto, puesto que en cada una de las armaduras del condensador existe una pareja de cargas positiva y negativa del mismo valor). Se debe recalcar que el empleo de la función valor absoluto hubiera evitado el error, pero complica la resolución analítica.

Se tiene, de nuevo el sistema gobernado por los dos subsistemas:

**Subsistema 1'**: Señal  $\sigma_1'(x(t)) \rightarrow (S_1 \text{ OFF}, S_2 \text{ ON}) \forall x(t) = (-10^{-3}, I(t))^T$

**Subsistema 2'** : Señal  $\sigma_2'(x(t)) \rightarrow (S_1 \text{ ON}, S_2 \text{ OFF}) \forall x(t) \neq (-10^{-3}, I(t))^T$

(Ec. 123)

$$\begin{aligned} x_{\sigma_1'}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -1500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} E \\ x_{\sigma_2'}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \end{pmatrix} E \\ x(t=0) &= \begin{pmatrix} Q(0) \\ I(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 124}) \end{aligned}$$

Del cual se ha modificado (concretamente, se ha traspuesto el signo) la variable de estado  $Q(t)$  para las señales de conmutación dependientes del estado (Ec. 123) y las condiciones iniciales del sistema global (Ec. 124).

El sistema evoluciona, análogamente a la explicación dada en la primera parte de este ejemplo, desde el subsistema 2':

$$x_0 = x_{\sigma_2'}(t=0) = \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución vendrá dada por:

$$x_{\sigma_2'}(s) = \phi_{\sigma_2'}(s)x_0 + \phi_{\sigma_2'}(s)Bu_2(s) = (sI - A_{2'})^{-1} \begin{pmatrix} Q(0) \\ I(0) \end{pmatrix} + (sI - A_{2'})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix} \frac{E}{s}$$

Del cual sólo ha cambiado el término de la solución homogénea  $x_{\sigma_2'}(s)_h$ , al haberse modificado las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 x_{\sigma_2'}(s)_h &= \frac{1}{s(s+2000)+500000} \begin{pmatrix} s+2000 & 1 \\ -500000 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{(s+292.893)(s+1707.107)} \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-4}(s+2000) \\ 250 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{1.2071}{s+292.893} + \frac{-0.2071}{s+1707.107} \right] \\ \frac{250}{(s+292.893)(s+1707.107)} \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$x_{\sigma_2'}(t)_h = \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-4} (1.2071 \cdot e^{-292.893t} - 0.2071 \cdot e^{-1707.107t}) \\ 0.17678 (e^{-292.893t} - e^{-1707.107t}) \end{pmatrix}$$

Reescribiendo la solución general:

$$x_{\sigma_2'}(t) = x_{\sigma_2'}(t)_h + x_{\sigma_2'}(t)_p = \begin{pmatrix} -0.01 - 0.01267 \cdot e^{-292.893t} + 0.00217 \cdot e^{-1707.107t} \\ -3.35872 (e^{-292.893t} - e^{-1707.107t}) \end{pmatrix}$$

Así, el sistema conmuta cuando:

$$Q(t) = -0.01 - 0.01267 \cdot e^{-292.893t} + 0.00217 \cdot e^{-1707.107t} = -10^{-3}$$

Nótese que dicha ecuación no tiene solución para un instante de  $t$  finito, esto es debido a que se idealiza el problema llevándolo a su régimen estacionario, cuando se está evaluando el régimen transitorio. Así, se tiene que para  $t = 0$ , en condiciones forzadas, la carga adquiere un valor de  $-0.01 \text{ C}$ , que aumenta en valor absoluto para valores de  $t$  pequeños, y luego tiende al valor de  $-0.01$  en régimen estacionario.

Con tal de resolver el problema, se procede a un método iterativo que consiste en introducir valores para la variable de estado  $Q(t)$  ligeramente inferiores a  $-10^{-3}$ . En concreto, para el valor  $Q(t) = -0.0105$ , se halla un tiempo  $t = 1.1036 \cdot 10^{-2}$  segundos.

También se puede optar por derivar la función  $Q(t) = -0.01 - 0.01267 \cdot e^{-292.893t} + 0.00217 \cdot e^{-1707.107t}$  y hallar su máximo. Así:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -0.01267(-292.893) \cdot e^{-292.893t} + 0.00217(-1707.107) \cdot e^{-1707.107t} = 0$$

Que existe para un valor de  $t_k = 1.97115 \text{ s}$ . En este instante la carga es  $Q(t_k) = -0.01 \text{ C}$ , por lo que el resultado no soluciona la problemática existente. El rango de valores de  $t \in (t_0, t_k)$  es muy estrecho, por lo que la carga tiende de forma rápida al régimen estacionario.

Para seguir analizando el sistema global, habrá que modificar las condiciones de conmutación con el valor encontrado de  $Q(t) = -0.0105$ . Así, se tiene:

**Subsistema 1'**: Señal  $\sigma_1'(x(t)) \rightarrow (S_1 \text{ OFF}, S_2 \text{ ON}) \forall x(t) = (-0.0105, I(t))^T$

**Subsistema 2'**: Señal  $\sigma_2'(x(t)) \rightarrow (S_1 \text{ ON}, S_2 \text{ OFF}) \forall x(t) \neq (-0.0105, I(t))^T$

(Ec. 125)

Para estas condiciones (Ec. 125), se tiene que el sistema conmuta en el instante  $t = 1.1036 \cdot 10^{-2}$ , por lo que el sistema global pasa al subsistema 1' gobernado por la señal  $\sigma_1'(x(t))$ . En este instante, el sistema es de la forma:

$$\dot{x}_{\sigma_1'}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -500000 & -1500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} E$$

Con condiciones iniciales igual al estado final alcanzado para el anterior subsistema, es decir:

$$\dot{x}_{\sigma_1'}(t=0) = \dot{x}_{\sigma_2'}(t=1.1036 \cdot 10^{-2}) = \begin{pmatrix} -0.0105 \\ I(t=1.1036 \cdot 10^{-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0105 \\ -0.132548 \end{pmatrix}$$

Nótese la importancia de determinar la referencia del tiempo que se usa, considerando el subsistema en que se halla de forma clara, y a la vez el número de conmutación, es decir, las veces que ha conmutado el sistema. Para no sobrecargar la nomenclatura, se prescinde de esta última observación, pero se tiene en cuenta en todo momento para el análisis.

Se estudia ahora el comportamiento del sistema, que se encuentra en el subsistema 1' (Ec. 117). Así, se tiene que la solución viene dada por la (Ec.23):

Para simplificar la notación, el estado inicial de la primera conmutación ( $i = 0$ ), que corresponde al subsistema 1' se denota por  $x(t_{\sigma_1'} = 0) = x_1$ . También se debe recalcar que, para facilitar el análisis, se toma como tiempo inicial  $t = 0$ , aunque en referencia global (es decir, puesta a cero del cronómetro al iniciar el análisis completo del sistema sin detenerlo, y no cada vez que el sistema conmuta) resultaría el tiempo final del estado anterior en que se encontraba el sistema, es decir,  $t = 1.1036 \cdot 10^{-2}$ s.

$$x_{\sigma_1'}(t) = x_{\sigma_1'}(t)_h + x_{\sigma_1'}(t)_p = x_{\sigma_1'}(t)_h = \phi_{\sigma_1'}(t) \cdot x(t_{\sigma_1'} = 0) \quad (\text{Ec. 126})$$

$$\begin{aligned} x_{\sigma_1'}(s) &= \phi_{\sigma_1'}(s) \cdot x(t_{\sigma_1'} = 0) = (sI - A_1')^{-1} \cdot x_1 = \frac{1}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{CL}} \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L} & 1 \\ -\frac{1}{CL} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0105 \\ -0.132548 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 + s \cdot 1500 + 500000} \begin{pmatrix} s + 1500 & 1 \\ -500000 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0105 \\ -0.132548 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + s \cdot 1500 + 500000} \begin{pmatrix} -0.0105 \cdot s - 15.882548 \\ 5250 - 0.132548 \cdot s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Ec. 127)

En el espacio temporal resulta:

$$x_{\sigma_1'}(t) = \begin{pmatrix} 0.01077 \cdot e^{-1000t} - 0.02127 \cdot e^{-500t} \\ -10.7651 \cdot e^{-1000t} + 10.63255 \cdot e^{-500t} \end{pmatrix} \quad (\text{Ec. 128})$$

La carga  $Q(t)$  crece/disminuye en valor absoluto (desde su estado inicial de -0.0105) hasta llegar a 0 en estado estacionario. La intensidad  $I(t)$  decrece de manera muy accentuada en un primer intervalo corto de tiempo (dominio del valor propio  $\lambda_2 = -1000$ ), para luego tender a un valor estacionario de 0. Se trata, por lo tanto, de una respuesta estable.

Para que el sistema vuelva a conmutar, se debe verificar la siguiente ecuación (de Ec. 125):

$$0.01077 \cdot e^{-1000t} - 0.02127 \cdot e^{-500t} = -0.0105 \quad (\text{Ec. 129})$$

Que no se cumple para valores de  $t > 0$ . Siendo este subsistema no controlable, en no disponer de entrada  $u(t)$ , el sistema global no puede volver a conmutar, ya que la carga nunca llega a alcanzar “por sí sola” (es decir, sin ninguna excitación externa) el valor necesario para que el Switch  $\sigma_2$ , actúe.

Análogamente a la explicación dada para el primer caso del sistema, la solución tiende a un punto estable (la condición para que el sistema conmute) hasta  $t = 1.1036 \cdot 10^{-2}\text{s}$ , y posteriormente conmuta, viniendo regido por el subsistema 1', y evoluciona de forma estable hasta un punto de equilibrio igual al origen. El sistema es, por tanto, globalmente asintóticamente estable.

### • Controlabilidad del sistema

Se determina la matriz de controlabilidad del sistema global (se suprime el símbolo “'” para no sobrecargar la nomenclatura), según Ec. 61:

$$C_\sigma = (B_1, B_2, A_1 B_1, A_2 B_1, A_1 B_2, A_2 B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{R}{L^2} & \frac{R+R'}{L^2} \end{pmatrix}$$

Cuyo rango es máximo,  $n = 2$ , de manera análoga a la expuesta en el primer ejemplo. Así, se tiene que el sistema es controlable. La controlabilidad del sistema es debida a la entrada  $u(t)$  del subsistema 2', análogamente al anterior ejemplo.

### Transformación a FCC

Se quiere determinar la FCC del subsistema 2' (ya que el 1' es no controlable debido a la ausencia de entrada). Para este subsistema, la matriz de controlabilidad es:

$$C_\sigma = (B_2, A_2 B_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{R+R'}{L^2} \end{pmatrix}$$

La matrices  $W$  y  $T$  toman la forma:

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R+R'/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = C_\sigma W = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{R+R'}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R+R'/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Por lo que  $T$  resulta ser la misma matriz que para el primer caso.

Para determinar  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  (asociadas al subsistema 2') se calcula (según Ec. 62):

$$\begin{aligned} \bar{A} = T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & \frac{-R+R'}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & \frac{-R+R'}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & \frac{-R+R'}{L} \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El nuevo espacio de estados es:

$$\bar{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} -L & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = -L \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix}$$

Así, se tiene, de forma análoga al primer caso, que el sistema ya se encontraba en forma controlable, ya que la matriz de controlabilidad tiene rango máximo. La matriz  $\bar{A}$  resulta la misma matriz del sistema, y  $\bar{B}$  un vector linealmente dependiente de  $B$ . Se debe recalcar una pequeña

diferencia respecto al caso anterior: en este caso, el sistema es completamente controlable solamente hasta alcanzar el instante de conmutación del subsistema 2' al 1', ya que en este último no se dispone de entrada y por lo tanto el sistema no es controlable.

De forma concreta, para el caso de estudio, el sistema será controlable porque el modo activo para  $t = t_0$  es el subsistema 2', siendo dicho sistema controlable. Si, por el contrario, el sistema empezara en el subsistema 1' (no controlable), la señal de conmutación deberá ser tal que se garantice que el sistema conmute al subsistema 2'. En caso que el estado no alcance el valor definido para el señal de conmutación 2', el sistema global no será nunca controlable, y el SLDC solamente será un SLD.

### • Observabilidad del sistema

Se determina la matriz de observabilidad, que se calcula según el vector  $C$  sea  $C = (1,0)^T$  o  $C = (0,1)^T$ . Esta es de la forma (se suprime el símbolo “ ‘ ” ), según Ec. 66:

$$\mathcal{O}_\sigma = (C_1^T, C_2^T, A_1^T C_1^T, A_1^T C_2^T, A_2^T C_1^T, A_2^T C_2^T)^T = (C^T, A_1^T C^T, A_2^T C^T)^T$$

En el caso en que  $C = (1,0)^T$ :

$$\mathcal{O}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso en que  $C = (0,1)^T$ :

$$\mathcal{O}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} \end{pmatrix}$$

En ambos casos, la matriz  $\mathcal{O}_\sigma$  es de rango máximo ( $n = 2$ ), por lo que se desprende que el sistema es completamente observable.

### Transformación a FCO

Se quiere determinar la FCO del subsistema 2' (ya que el 1' fue estudiado de manera indirecta en el primer caso al ser las dos matrices  $A_1 = A_2$ ). Para este subsistema, la matriz de observabilidad es ( para el vector  $C = (0,1)$  ):

$$\mathcal{O}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} \end{pmatrix}$$

En que  $Q$  toma la forma:

$$Q = \left( \begin{bmatrix} R + R'/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando las transformaciones a las matrices  $A, B, C$ , y al vector  $x$  resulta (según Ec. 67):

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R+R'}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ 1 & -\frac{R+R'}{L} \end{bmatrix} = A^T$$

$$\bar{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CQ = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -CL & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]$$

$$\bar{x} = Q^{-1}x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CL}Q \\ I \end{bmatrix}$$

En el caso en que  $C = (1,0)^T$ , la matriz de observabilidad resulta:

$$\mathcal{O}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y  $Q$  toma la forma:

$$Q = \left( \begin{bmatrix} R + R'/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} R + R'/L & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -R + R'/L \end{bmatrix}.$$

Las matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{C}$  resultan (según Ec. 67):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{CL} \\ 1 & -\frac{R+R'}{L} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [0 \quad 1]$$

El nuevo espacio de estados resulta:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} R + R'/L Q + I \\ Q \end{bmatrix}$$

El sistema será siempre completamente observable, ya que, independientemente del estado en que este se encuentre, es decir, aunque llegue al instante de conmutación, ya que ambos subsistemas son completamente observables.

## Dualidad entre controlabilidad y observabilidad

Así, a la vista de los resultados, vemos que se cumple el principio de dualidad para el subsistema 2': el sistema  $\Sigma(\bar{C}_i, \bar{A}_i)$  es completamente observable (Ec. 66) si y sólo si su sistema dual  $\Sigma(\bar{A}_i^t, \bar{C}_i^t) = \Sigma(A_i, C_i)$  es completamente controlable (Ec. 61). Además, también son aplicables los ejemplos asociados a elegir los vectores  $B$  o  $C$  como vectores propios de la matriz  $A$ , en que el subespacio controlable u observable, respectivamente, mínimo sería mínimo, de dimensión 1. También se tiene que para  $B$  o  $C$  nulos, el subespacio controlable u observable, respectivamente es nulo.

### ❖ Conclusiones generales

El análisis de este sistema no es trivial. En concreto, hace falta conocer la evolución del espacio de estados para analizar su estabilidad, controlabilidad y observabilidad, ya que el trío de matrices  $(A, B, C)$  será distinto según el valor del estado. Además, el carácter de la conmutación viene fuertemente determinado por los parámetros del circuito, además de las condiciones iniciales de partida y de la condición empleada para conmutar. Es decir, no se puede asegurar de forma genérica la evolución del sistema, ya que posiblemente (tal como se ha comprobado al replantear el caso) el sistema no evolucione de la manera preestablecida. Se ha puesto de manifiesto que la condición de conmutación no siempre se puede cumplir para unas condiciones iniciales determinadas, y, además, el comportamiento cíclico del sistema global no se cumple, puesto que la condición de conmutación no se cumple para el subsistema 1', donde se esperaba que el sistema conmutara por segunda vez.

En resumen, se debe asegurar un correcto estudio de todas las posibles alternativas de evolución de un SLDC dependiente del estado, ya que, gracias a una correcta modelización, se podrán alcanzar los resultados obtenidos y el carácter que uno espera.



## 6. Planificación

Este proyecto se ha estructurado en el calendario teniendo en cuenta los períodos establecidos para la realización del Trabajo de Fin de Grado (TFG) en el Cuatrimestre de Primavera del curso 2015/16. Así, se establece como fecha de inicio el día 4 de febrero y finalización el día 20 de junio de 2016, con lo que la duración total es, en días, 138. De este modo, suponiendo una dedicación del alumno a razón de 2,5 h/día, se tiene una dedicación total de 345 horas, que cumple con los 25h/crédito de dedicación estimados para el TFG.

Para organizar la estructura de la planificación, se establece como semana 1 la correspondiente a la fecha de inicio y, como semana 21, la de la fecha de finalización. A continuación se detalla:

**Semanas 1,2 y 3:** Elección del tema. Inicio del proyecto: definición de objetivos y alcance del trabajo. Búsqueda de fuentes de información.

**Semanas 4 y 5:** Estudio de la información asociada a los SLD. Repaso de conceptos impartidos en el grado (Álgebra Lineal y Control Automático).

**Semanas 6, 7 y 8:** Redacción y desarrollo de la teoría fundamental acerca de SLD. Decisión y empleo de criterios para realizar los análisis de solución, estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

**Semanas 9, 10 y 11:** Estudio de la información asociada a los SLDC. Redacción paralela de la teoría introductoria a los SLDC. Establecimiento de analogías y comparativas entre SLD y SLDC.

**Semanas 12, 13 y 14:** Búsqueda y definición del primer caso práctico. Búsqueda de información relativa a la teoría de circuitos eléctricos y referencias didácticas de circuitos análogos. Análisis del circuito.

**Semanas 14, 15 y 16:** Definición del segundo caso práctico. Análisis del circuito. Replanteamiento del sistema a causa de la aparición de problemáticas. Detección, corrección y discusión de resultados.

**Semanas 17, 18 y 19:** Redacción de la parte introductoria. Análisis y exposición de resultados. Extracción y redacción de conclusiones.

**Semanas 20, y 21:** Revisión detallada del proyecto. Entrega.

Para la realización del proyecto, han sido necesarios un ordenador portátil Asus (para redactar la memoria y buscar información), e iluminación del estudio donde se ha efectuado. En menor medida, también se han usado papeles para escribir y hacer cálculos, así como calculadoras programales (hp 50g) o de uso escolar (Casio).



## 7. Costes

La realización de este proyecto no implica el uso de recursos materiales, si bien se podrían encontrar en proyectos con experimentaciones o simulaciones, cosa que el presente proyecto no abarca. Así, para la estimación de costes, solamente se tendrán en cuenta los costes indirectos, derivados del uso de los recursos materiales empleados durante el transcurso del mismo, y que se limitan al consumo eléctrico y de Internet. En concreto, se considerarán los costes asociados al uso del ordenador portátil (marca *Asus*, modelo *K61*), que requiere energía eléctrica y consumo de datos de la conexión a Internet, y a la iluminación del estudio donde se ha realizado mayoritariamente el trabajo, tanto en términos de redacción de la memoria (uso obligado del ordenador), como en análisis y cálculos derivados del trabajo. No se tendrá en cuenta el coste original del ordenador, adquirido en el año 2008, cuyo beneficio, en términos académicos, es constante debido a las exigencias del Grado (se considera un coste amortizado). Tampoco se consideran costes secundarios tales como el alquiler del estudio, el consumo de agua, gas, calefacción o aire acondicionado, ni tampoco uso de papel o impresiones.

En la Tabla 1 se puede apreciar el cálculo efectuado en contabilizar los costes (indirectos) totales.

*Tabla 1. Cálculo desglosado de costes indirectos.*

Concepto	Coste unitario [€/Kwh]	Uso [horas]	Consumo [W]	Coste [€]
Luz	0,16	345	250	13,80
Ordenador portátil	0,16	345	90	4,97
	Coste unitario [€/mes]	Uso [meses]		
Internet	37,35	5	-	186,75
<b>COSTE TOTAL</b>		<b>Precio Base</b>	<b>205,52</b>	
		<b>IVA (21%)</b>	<b>43,16</b>	
		<b>TOTAL</b>	<b>248,68</b>	

Gracias al cálculo efectuado, se obtiene un valor total de costes 248,68 €. Si bien es un cálculo aproximado, se puede interpretar como un gasto compartido también para otras tareas paralelas realizadas a lo largo del transcurso del proyecto, tales como la iluminación a terceras personas.

## 8. Impacto ambiental

Para evaluar el impacto físico y social del proyecto, se considerarán los elementos presentados en el capítulo anterior, referente a los costes, ya que son la causa mayoritaria de emisiones de gases de efecto invernadero (GEH) derivados del uso de los recursos materiales durante la realización. Cabe recalcar, sin embargo, que este impacto es de tipo secundario, puesto que los recursos consumidos utilizan la energía eléctrica para poder funcionar.

A tal efecto, se toma como referencia la “*Guia pràctica per al càlcul d'emissions de gasos amb efecte hivernacle (GEH)*” [8], para cuantificar las emisiones de CO<sub>2</sub> generadas a partir del consumo eléctrico necesario para el funcionamiento del ordenador portátil y de la iluminación del estudio. En la Tabla 2 se puede observar la emisión de CO<sub>2</sub> generada por cada concepto, teniendo en cuenta que 1 KWh produce 0,65 kg de dicho gas.

Tabla 2. Emisiones de CO<sub>2</sub> generadas por los elementos de consumo.

Concepto	Tiempo de consumo [horas]	Consumo de potencia [W]	Consumo de energía [KWh]	Emisión de CO <sub>2</sub> [kg]
Luz	345	250	86,25	56,063
Ordenador portátil	345	90	31,05	20,183
<b>TOTAL DE EMISIONES DE CO<sub>2</sub> [kg]</b>				<b>76,246</b>

Gracias al cálculo efectuado, se obtiene un valor total de emisiones de CO<sub>2</sub> de 76,246 kg. Si bien es un cálculo aproximado, se puede inducir que el gasto es compartido con otras tareas realizadas gracias a los recursos materiales que se han especificado en la Tabla 2.

## Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos y, según los objetivos propuestos al inicio del proyecto, se exponen a continuación las conclusiones alcanzadas a lo largo del mismo.

Teniendo en cuenta que este proyecto pretende evidenciar la eficacia y, a la vez, versatilidad del Álgebra Lineal como herramienta de análisis, se enfocarán las conclusiones siguiendo esta premisa.

En primer lugar, se ha desarrollado una introducción teórica acerca de las características más relevantes de los Sistemas Lineales Dinámicos, teniendo en cuenta cómo se pueden tratar con herramientas del Álgebra Lineal. Se han clasificado según distintos criterios y se ha expuesto la teoría en base al objeto de estudio principal que sigue: los SLDC.

En segundo lugar, se ha realizado una introducción de los SLDC. Esta introducción pretende destacar los aspectos fundamentales que, según el criterio del autor del proyecto, están más vinculados a la concepción de un sistema conmutado, ya que la bibliografía sobre este tipo de sistemas es tan extensa como variada. El estudio es una analogía de la teoría expuesta para los SLD, si bien se puntualiza en cada caso los criterios que matizan o hacen diferir ciertas propiedades de estos sistemas. Además, la explicación dada sirve para analizar y justificar de forma conveniente el caso de estudio que se plantea en el capítulo 6 del proyecto.

En tercer lugar, teniendo en cuenta que este proyecto se enmarca en unos estudios de grado de ingeniería, se ha planteado un caso de estudio práctico de un sistema SLDC que pretende aplicar y aclarar los conceptos expuestos en los capítulos referentes a la teoría. Así, el conveniente análisis del sistema se ha efectuado en concordancia con la doctrina del Álgebra, además de otras disciplinas como el cálculo diferencial (que pretende ser un apoyo al criterio del Álgebra). Además, el estudio del sistema requiere la abstracción de conceptos propios relativos a los estudios del grado, así como capacidad “imaginativa” para idear el funcionamiento de los sistemas que se plantean. En concreto, para desarrollar de forma conveniente los casos prácticos expuestos, se han elegido unas condiciones de conmutación acordes a aquello que se pretende estudiar. Para el primer caso, se exponen todas las características explicadas en la teoría sobre SLDC, mientras que en el segundo caso, se observa la problemática que surge a raíz de intentar equiparar la concepción de un sistema con la modelización de este. En este último caso, en que la conmutación viene dada por el valor que toma el estado, la teoría expuesta sobre SLDC no se extiende de forma trivial, y se realiza acorde a la evolución que presenta el sistema. Ante las dificultades encontradas, se ha podido reconducir el estudio de manera que los objetivos sean cumplidos. Así, se concluye que las herramientas y criterios propios del Álgebra han sido necesarios y suficientes para llevar a cabo el análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad, así como el planteamiento de la solución, del sistema.

En cuarto lugar, cabe destacar la importancia que merecen los SLDC a consecuencia de ser una potente herramienta para modelizar sistemas de diversa índole tecnológica, tal como se demuestra en el capítulo referente al caso de estudio. Así, la conjunción entre la ingeniería eléctrica y las matemáticas requiere un profundo desarrollo para llegar a conclusiones óptimas, que pueden ser muy útiles como herramientas para poder profundizar en los aspectos teóricos sobre el Álgebra Lineal (u otras disciplinas similares), y también para investigar y desarrollar nuevas aplicaciones relacionadas con la tecnología.

En quinto lugar, se concluye, gracias al caso práctico que el Álgebra es una herramienta muy potente para entender qué pasa dentro de un SLDC, aunque esto implica que la resolución del circuito no es sencilla ni trivial. Asimismo, en contraposición con la metodología empleada en el ámbito de la ingeniería eléctrica, el Álgebra no permite simplificaciones u omisiones usuales de alguna variable del circuito (por ejemplo la intensidad del condensador). La importancia, se recalca una vez más, es entender qué pasa, y no saber qué resultado se obtiene: la diferencia es que la ingeniería eléctrica incide en el estudio de la “caja negra”. Por eso, a la práctica, estas dos metodologías son muy diferentes, por los objetivos de estudio que persiguen.

Por último, y a modo de síntesis, se manifiesta que los objetivos propuestos al inicio del proyecto han sido cumplidos, aun siendo todos ellos de distinta naturaleza. Se debe recalcar la finalidad de estudio teórico de este trabajo, pues la posibilidad de entender y superar obstáculos en la resolución del caso práctico también se considera un objetivo cumplido.





## Agradecimientos

Me gustaría agradecer enormemente el apoyo recibido por parte de la directora del trabajo, María Isabel García. Gracias a su constante ayuda, al entusiasmo mostrado y al empuje en cualquier toma de decisión, la realización del proyecto se ha convertido en una tarea enriquecedora.

Asimismo, quisiera hacer una mención especial a los seres queridos, que me brindan apoyo y consejo constante, y me permiten día a día la superación de cualquier reto que se plantee.

Tampoco quisiera olvidarme de aquellos que han compartido parte de mi vida, y cuyo imborrable recuerdo es el ejemplo para poder llegar, algún día, casi tan lejos como ellos.



## Bibliografía

### Referencias bibliográficas

- [1] Javier ARACIL, Fabio GÓMEZ-ESTERN. *Apuntes de Regulación Automática (Ingeniería Electrónica)*. (<http://www.esi2.us.es/~fabio/cabie>).
- [2] C. K. ALEXANDER, M. N. SADIKU *Fundamentos de circuitos eléctricos* Mc Graw Hill (tercera edición).
- [3] Julio J. BRASLAVSKY. *Notas de Control Automático 2*. Universidad Nacional de Quilmes, 2001.
- [4] Jose Daniel CARTAS AYALA. *Evidencia experimental de un oscilador caótico conmutado*. México DF, Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Febrero 2010.
- [5] Giacomo COMO. *Lecture 4-Lyapunov Stability*. Lunds Universitet, 2016
- [6] Prof. José R. ESPINOZA C. – Daniel G. SBÁRBARO H.. *Apuntes Sistemas Lineales Dinámicos*, Universidad de Concepción-Facultad de Ingeniería, 14<sup>av</sup> edición, Marzo 2015.
- [7] M. Isabel GARCÍA PLANAS- M. Dolor MAGRET. *Eines d'àlgebra lineal i matricial per a l'enginyeria*. Barcelona, Septiembre 2014.
- [8] GENERALITAT DE CATALUNYA- OFICINA CATALANA DEL CANVI CLIMÀTIC. *Guia pràctica per al càlcul d'emissions de gasos amb efecte hivernacle (GEH)*. Marzo 2016.  
  
[http://canviclimatic.gencat.cat/web/.content/home/reduceix\\_emissions/guia\\_de\\_calcul\\_d\\_emissions\\_de\\_co2/160411\\_Guia-practica-calcul-emissions\\_sense-canvis\\_CA.pdf](http://canviclimatic.gencat.cat/web/.content/home/reduceix_emissions/guia_de_calcul_d_emissions_de_co2/160411_Guia-practica-calcul-emissions_sense-canvis_CA.pdf)
- [9] D. GÓMEZ-GUTIÉRREZ, C. LÓPEZ-LIMÓN, A. RAMÍREZ-TREVIÑO, J. RUIZ-LEÓN. *Observabilidad de Sistemas Lineales Conmutados: Enfoque Geométrico* Instituto Politécnico Nacional (Jalisco, México) 2010.
- [10] João P. HESPANHA. *Hybrid and Swithced Systems: Modeling and Analysis*. University of California at Santa Barbara, 2002.
- [11] C. R. LINDO CARRIÓN. *Circuitos eléctricos I. Circuitos de segundo orden*.

- [12] José Luis Jaimes Maldonado. Control Tolerante a Fallas de un sistema Lineal Por Pedazos Aplicado un Avión. PhD. México. Febrero de 2014
- [13] Ruby Angélica MENDOZA TORRES. *Análisis y control de sistemas conmutados*. San Luis Potosí, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Marzo 2013.
- [14] J. A. TORRES HENAO. *Sistemas Dinámicos Planos*. Universidad Nacional de Colombia, 2013.
- [15] Universidad EAFIT. *Control e Instrumentación Electrónica (Clase 07: Espacio de estados)*. 2010
- [16] Zhendong SUN, Shuzhi S. GE. *Switched Lynear Systems. Control and Design*. USA, 2005

## Bibliografía complementaria

En este apartado se muestran los recursos bibliográficos utilizados en distintos capítulos para comprender mejor ciertos aspectos relativos a la teoría, pero que no se citan de forma explícita en el proyecto. La bibliografía viene en forma de páginas web.

Para matizar aspectos relacionados con los SLD:

- [1] [http://iaci.unq.edu.ar/Materias/control2/web/Programa2007\\_2C.html](http://iaci.unq.edu.ar/Materias/control2/web/Programa2007_2C.html)

Para la realización de cálculos sencillos (relativos a los SLD):

- [2] <http://www.mty.itesm.mx/etie/deptos/m/ma-841/laplace/inversa.htm>

Para obtener conocimiento sobre los circuitos RLC:

- [3] <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/inducccion/lcr/lcr.htm>
- [4] <http://www.sabelotodo.org/fisica/circuitosRLC.html>

Consideraciones ambientales respecto a la realización de proyectos:

- [5] M. GONZÁLEZ. *Consideraciones ambientales para los PFC*. Dpto Proyectos Ingeniería-UPC. Junio 2011